Jeudi 05 janvier 2017

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*

* Soit $V_{\Re'/\Re}$ la vitesse (algébrique) d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.

On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ; dy' = dy \,; dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$

* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}

Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C

* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, ...$ tandis que les vecteurs classiques à trois composantes seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{v}$, ...

De même, on utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.

1. Dans un train...

Trois personnes sont assises dans un train qui se déplace, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$, à la vitesse $\overrightarrow{V} = V\ \overrightarrow{u_x}$ le long de l'axe Ox ($\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur de base pour l'axe Ox dans $\mathcal{R}$). La première, T, est placée en tête du train, la deuxième, M, au milieu du train et la troisième, Q, est en queue de train. La longueur du train mesurée par ces personnes est L. A l'instant où M passe devant un observateur O du référentiel $\mathcal{R}$, il reçoit simultanément un signal lumineux émis par T et par Q.

Les résultats dans cet exercice doivent être donnés en fonction de $L, V, \beta = \dfrac{V}{c}$ ou $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$

a- Déterminer les coordonnées spatiotemporelles des événements E_1 "émission du signal par T" et E_2 "émission du signal par Q" dans le référentiel $\mathcal{R}'\,(ct', x', y', z')$ comobile avec le train et dans le référentiel $\mathcal{R}\,(ct, x, y, z)$, sachant que les coordonnées de l'événement "signaux reçus en M" dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont nulles et que l'axe des x dans $\mathcal{R}$ est le même que l'axe des x' dans $\mathcal{R}'$.

b- Quelle est la durée qui sépare les événements E_1 et E_2 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (on précisera l'ordre dans lequel se produisent ces événements) ? Dans ces deux référentiels, calculer la pseudo-norme de l'intervalle d'espace-temps entre les deux événements.

2. Un voyage du TARDIS

Le Docteur dans le TARDIS[1] (Temps A Relativité Dimensionnelle Inter Spatiale ou Time And Relative Dimension In Space) se trouve sur une orbite circulaire autour de la planète Gallifrey qui possède les mêmes caractéristiques de masse et de taille que la Terre. On suppose que ce vaisseau spatial peut être modélisé par un point.
On suppose, de plus, que l'effet du champ gravitationnel de la planète peut être représenté par une métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

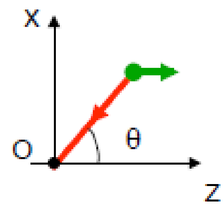
où G est la constante de gravitation et M la masse de Gallifrey.
a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

b- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^2 = \theta$. En déduire que le mouvement est plan et qu'il existe un référentiel pour lequel : $\theta = \frac{\pi}{2} =$ constante est solution de l'équation de la géodésique.
c- Déterminer l'équation de la géodésique pour : $x^3 = \varphi$.
d- On suppose que la géodésique suivie par le TARDIS correspond à une portion d'orbite circulaire ($r =$ constante $=$ rayon de Gallifrey) .
Que devient l'expression de l'équation de la géodésique précédemment déterminée ? Que peut-on dire, avec cette hypothèse sur la vitesse du TARDIS le long du trajet ?

Il croise Ellen Ripley dans le Nostromo qui orbite aussi autour de Gallifrey sur la même orbite, mais en sens inverse[2]. Le Nostromo est supposé ponctuel.
Au moment où les deux vaisseaux se croisent, le Nostromo va à la vitesse $\overrightarrow{V} = V \ \overrightarrow{e_x}$ par rapport au TARDIS ($\overrightarrow{e_x}$ vecteur de base de l'axe Ox). L'axe Ox est perpendiculaire à l'axe Oy sur lequel se trouvent le TARDIS et le Nostromo au moment de la rencontre. Chaque vaisseau possède une horloge émettant un signal sous la forme d'une onde électromagnétique à la fréquence ν_0. Les deux horloges donnent la même heure au moment du croisement. Le Docteur observe le signal qu'il reçoit du Nostromo (dans la direction Oy) à la fréquence ν_T et compare sa fréquence à celle de son horloge. On notera $\Re_T$ le référentiel comobile avec le TARDIS et $\Re_N$ celui comobile avec le Nostromo.

[1] Les auteurs du problème remercient la série "Docteur Who" pour son aimable participation.
[2] Les auteurs du problème remercient la série "Alien" pour son aimable participation.



e- Afin de déterminer la différence entre ν_T et ν_0, on se place dans le cas idéal, décrit par la figure ci-dessus, d'une source de signal électromagnétique périodique (point vert) se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ (flèche verte) envoyant un signal dans la direction θ (flèche rouge) vers un observateur O. Montrer que si T_e est la période du signal dans le référentiel comobile avec la source et T_r est la période du signal dans le référentiel de l'observateur, on a :

$$T_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta\right) T_e$$

f- En déduire l'expression de ν_T en fonction de ν_0 et de $\beta = \dfrac{V}{c}$ dans la configuration de l'exercice, lors de la communication entre le TARDIS et le Nostromo.
g- En menant cette observation, le Docteur mesure donc une différence de fréquence entre son horloge et celle de Ripley. Il en déduit qu'après une orbite de période T_{orb} supplémentaire autour de la Terre, son horloge indiquera une heure différente que celle de Ripley lors du croisement suivant. De son côté, Ripley effectue les mêmes mesures lors du premier croisement. Qu'en déduit-elle ? Quel est l'écart entre les deux horloges au moment du deuxième croisement. Justifier les réponses.

3. Production du boson de Higgs

Le Large Hadron Collider (LHC) (voir, par exemple, les sites : www.decayfilm.com ou public.web.cern.ch/public/fr/lhc/lhc-fr.html), accélérateur de particules situé au CERN (voir, par exemple, les sites : public.web.cern.ch/public/ ou www.cern.ch), a annoncé le 4 juillet 2012 la détection probable d'événements dont les caractéristiques sont compatibles avec la détection d'un boson de Higgs. Cette particule, prédite par le modèle standard, aurait alors une énergie de masse au repos de $M_H c^2 = 125$ GeV.
Le boson de Higgs peut être produit lors d'une collision entre des quarks, particules élémentaires constituant les nucléons. Les quarks ne pouvant pas être isolés, une solution pour produire le boson est d'effectuer une collision à très grande énergie entre deux nucléons. Dans le cas du LHC, des paquets de protons sont accélérés de la même façon en sens opposés. La collision a lieu dans le détecteur (ATLAS ou CMS dans ce cas particulier). L'énergie de masse au repos du proton vaut $M_p c^2 = 938$ MeV.
a- Le référentiel du laboratoire (accélérateur) $\mathcal{L}$ est-il le référentiel d'inertie du système consistué de deux protons en collision ?
b- Le proton est constitué de 3 quarks. Si l'on fait l'hypothèse très simpliste que les 3 quarks ont une énergie de masse égale au tiers de celle du proton, quelle est l'énergie de

seuil permettant la production d'un boson de Higgs à partir de la collision de deux quarks accélérés en sens inverse ?
c- Si l'on suppose, par ailleurs, que la collision "casse" chaque proton en 3 quarks sans qu'il

Jeudi 05 janvier 2017

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. 2. Dans un train...

a- $ct_1 = -\gamma(1-\beta)L/2 \qquad x_1 = \gamma(1-\beta)L/2$
$ct_2 = -\gamma(1+\beta)L/2 \qquad x_2 = \gamma(1+\beta)L/2$
b- $t'_2 - t'_1 = 0 \qquad t_2 - t_1 = -\gamma\beta L/c \qquad s'^2 = s^2 = -L^2$

2. Un voyage du TARDIS

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

a- $g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$
$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$
$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2$
$g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -r^2\sin^2\theta$
Les autres termes de la métrique sont nuls.
b- *Equation en* $x^2 = \theta$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^{\,2}_{\alpha\,\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont :
$\Gamma^{\,2}_{1\,2} = \Gamma^{\,2}_{2\,1} = \frac{1}{2}g^{2\tau}\left(g_{\tau 1,2} + g_{\tau 2,1} - g_{12,\tau}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{dr} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^{\,2}_{3\,3} = \frac{1}{2}g^{2\tau}\left(g_{\tau 3,3} + g_{\tau 2,3} - g_{33,\tau}\right) = -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\cos\theta$
L'équation de la géodésique devient :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

Si l'on suppose qu'en $s=0$, on a : $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=0} = 0$

Alors : $\boxed{\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)_{s=0} = 0}$

Cela signifie qu'il existe des coordonnées dans lesquelles le mouvement reste dans un plan, comme dans les mouvements newtoniens autour d'une masse ponctuelle.

c- *Equation en* $x^3 = \varphi$

$$\frac{d^2x^3}{ds^2} + \Gamma^3_{\alpha\,\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont :

$$\Gamma^3_{3\,2} = \Gamma^3_{2\,3} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{32,3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{dr^2\sin^2\theta}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\Gamma^3_{3\,1} = \Gamma^3_{1\,3} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{31,3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{dr^2\sin^2\theta}{dr} = \frac{1}{r}$$

L'équation de la géodésique devient :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + 2\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

d- Or, on a : $\cos\theta = 0 = \text{constante}$

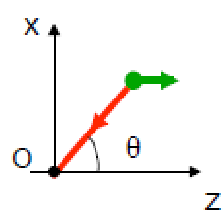
$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 = r^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2r\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}$$

De plus, on a : $dr = 0$

On obtient : $\frac{d\varphi}{ds} = \text{constante}$

Le TARDIS a une vitesse constante sur sa trajectoire.

e-



Dans le référentiel de l'observateur, au premier ordre, la période mesurée sur le récepteur T_r dépend de la période de l'émetteur τ_e dans ce référentiel suivant la relation :

$$T_r = \tau_e + \frac{v}{c}\cos\theta\;\tau_e$$

Or, d'après les transformations de Lorentz, dans le référentiel comobile avec l'émetteur, on a :

$$\tau_e = \gamma T_e$$

On en déduit immédiatement :

$$T_r = \gamma \left(1 + \beta \cos\theta\right) T_e'$$

f- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
donc $\dfrac{\nu_T}{\nu_0} = \gamma^{-1}$ (effet Doppler transverse)
h- Ripley observe exactement le même phénomène que le Docteur car les équations sont indépendantes du sens de la vitesse (β est au carré). Ces différences de fréquence entre les horloges sont purement un effet observationnel : au deuxième croisement, les horloges ne seront pas décalées !

3. Production du boson de Higgs

$M_H c^2 = 125$ GeV.
$M_p c^2 = 938$ MeV.
a- Oui bien sûr les deux protons vont à la même vitesse en sens inverse, l'impulsion est nulle.
b- $E_S = 125000 - (2 * 938/3) = 1.2437 \times 10^5$ MeV.
c- $E_{c\,\min} = 3E_S = 3 * 125000 - 2 * 938 = 3.7312 \times 10^5$ MeV. Soit, par proton : $3.7312 \times 10^5/2 = 1.8656 \times 10^5$ MeV
Au LHC, les protons sont accélérés dans chaque sens jusqu'à une énergie de 4000 GeV = 4 TeV. Cette énergie considérable est nécessaire pour créer le plasma de quarks qui sera à l'origine de la production du boson.
d- $(\gamma - 1) M_p c^2 = 4000$ GeV
$\gamma = 4000/0.938 + 1 = 4265.4$
$\beta = \dfrac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(4265)^2}} = 1 - \frac{1}{2(4265)^2} = 1 - 2.75 \times 10^{-8}$