Master de Physique 1ère année

Jeudi 07 janvier 2016

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* Soit $V_{\Re'/\Re}$ la vitesse d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.

On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$.$c$ étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \qquad \text{avec } dy' = dy \text{ et } dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$

1. Mesures relativistes par une horloge optique

Cet exercice est inspiré de l'article de Chou, Hume, Rosenband et Wineland, Science, 20 septembre 2010, vol. 329, page 1630

Les horloges atomiques les plus précises au monde ont été construites à la Time and Frequency Division du NIST (National Institute of Standards and Technology). Ces horloges sont dites "optiques" car la transition d'horloge (qui concerne l'ion Al^+) correspond à une fréquence d'onde électromagnétique dans le visible de fréquence $f_0 = 1,121\ 10^{15}$ Hz .

a- Pour une première expérience, les chercheurs ont placé les ions de l'horloge dans un champ électrique radiofréquence qui donne à l'ion un mouvement de va-et-vient comme dans un potentiel harmonique.

On appelle $\Re'$ le référentiel comobile avec l'ion de l'horloge et $\Re$ le référentiel du laboratoire. On suppose que $\Re'$ est en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v} = v\ \overrightarrow{e_x}$ par rapport à $\Re$. On pose : $\beta = \dfrac{|v|}{c}$.On suppose que l'ion a un mouvement perpendiculaire au laser qui le sonde et donc à l'axe de visée de l'observatoire du laboratoire. Il n'y a ainsi pas d'effet Doppler classique à considérer, mais uniquement l'effet relativiste de dilatation du temps.

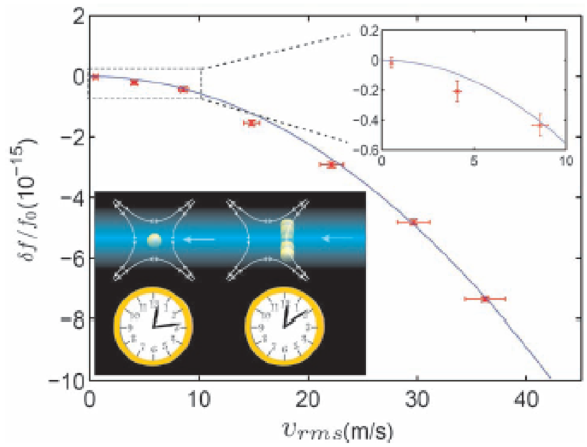
L'ion émet dans son référentiel propre une onde électromagnétique de fréquence f_0.

On suppose que l'ion est placé sur l'axe Ox de $\Re$. On appelle f la fréquence observée par un observateur fixe dans le laboratoire.On suppose que : $v > 0$.

a.1- Donner la relation entre une variation de temps propre $\delta\tau_0$ de l'ion et la variation associée δt observée dans le laboratoire en fonction de β.

a.2- Déterminer l'effet Doppler relativiste sur l'émission de l'ion, c'est-à-dire, la relation entre f et f_0 en fonction de β.

a.3- On mesure $v \approx 30$ m.s^{-1}, estimer numériquement un ordre de grandeur de β. Donner l'expression de f en fonction de f_0 au deuxième ordre en β.
a.4- Que devient l'effet relativiste si : $v < 0$?



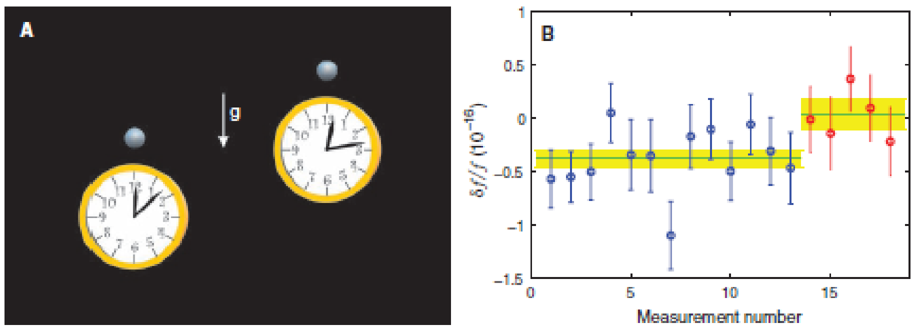
b- Cette figure donne la variation de la fréquence observée f par rapport à f_0 : $\dfrac{\delta f}{f_0}$ en fonction de la vitesse mesurée de l'ion de l'horloge : v_{rms}. Les points expérimentaux et leurs barres d'erreur sont représentés par des points avec des tirets horizontaux et la courbe superposée représente une estimation théorique.
b.1- Déterminer à partir des résultats un ordre de grandeur de l'erreur de mesure en fréquence $\dfrac{\Delta f}{f_0}$ ainsi qu'un ordre de grandeur de l'erreur en vitesse : $\dfrac{\Delta v}{v_0}$.
b.2- Les résultats obtenus sont-ils comptibles avec les calculs de la question **(a)** ?
c- Une deuxième expérience a été menée avec deux horloges. On suppose à présent que les ions des deux horloges sont piégés et restent fixes par rapport à $\Re$. Les deux horloges sont placées à des hauteurs différentes, on appelle la différence de hauteur : δh.
c.1- On pose U le potentiel gravitationnel de la Terre. Déterminer U en fonction de G constante gravitationnelle, M_{Terre} masse de la Terre et R_{Terre} rayon de la Terre.
Applications numériques : On donne $G = 6,67\ 10^{-11} u.s.i.$, $M_{Terre} = 6\ 10^{24}$ kg, $R_{Terre} =$ 6400 km, $c = 3\ 10^8$ m.s^{-1}
Vérifier que l'on a bien : $\left|\dfrac{U}{c^2}\right| \ll 1$. Justifier alors que la différence de potentiel gravitationnel entre deux horloges séparées d'une hauteur Δh puisse s'écrire au premier ordre :

$$\Delta U \approx g\Delta h$$

avec $g = -\dfrac{GM_{Terre}}{R^2_{Terre}}$. *Application numérique :* que vaut g ?.
c.2- Le potentiel gravitationnel étant faible, on peut supposer que la métrique décrivant l'espace-temps pour les deux horloges s'écrit :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\ c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

On pose que les quantités avec un indice 1 concernent l'horloge placée le plus bas et celles avec un indice 2 concernent l'horloge haute.
Déterminer la variation $\dfrac{\delta f}{f_1}$ de fréquence entre l'horloge haute et la basse en fonction de U_1 et de U_2.
c.3- En prenant en compte le fait que $\dfrac{U}{c^2} \ll 1$, déterminer $\dfrac{\delta f}{f_1} = \dfrac{f_2 - f_1}{f_1}$au premier ordre en fonction de $\delta U = U_2 - U_1$, puis en fonction de $\delta h = h_2 - h_1$ et de g.



d.1- L'expérience a été réalisée avec deux horloges à aluminium telles que décrites précédemment. Les résultats de la variation de hauteur d'une des deux horloges sont visibles sur la courbe. Les points 1 à 13 et 15 à 19 correspondent à deux positions différentes de l'horloge haute. Les droites horizontales représentent la moyenne de ces points et la largeur de la partie grise est une estimation de l'erreur de mesure. De quelle hauteur (même approximative) a été déplacée cette horloge ?
d.2- Dans les faits, l'horloge 2 a été déplacée de 33 cm. L'expérience est-elle concluante ?

2. Effet de recul d'un atome absorbant un photon

On suppose qu'un atome de masse m_1 est au repos dans le référentiel du laboratoire. On appelle $\mathcal{E}_{01}$ son énergie de masse au repos. Il absorbe un photon d'énergie $\mathcal{E}_\varphi = h\nu$ et d'impulsion $\overrightarrow{p}_\varphi$. Après l'absorption, de part le changement d'énergie interne, l'atome possède une énergie au repos $\mathcal{E}_{02} = m_1c^2 + h\nu_{12}$,en posant : $\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01} = h\nu_{12}$, ce qui représente l'énergie nécessaire pour le changement de niveau d'énergie interne de l'atome, et une impulsion $\overrightarrow{p}$.
a- Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{01}$ en fonction de m_1 et de c.
b- Quelles sont les quantités conservées avant et après l'absorption du photon ? Ecrire les équations de conservation associées avec les données du problème.
c- Montrer que les équations précédentes aboutissent à la relation :

$$\mathcal{E}_\varphi = (\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01}) \left(1 + \alpha \, \frac{\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01}}{\mathcal{E}_{01}}\right)$$

Déterminer la valeur de α.
Le terme $\alpha \, \dfrac{(\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01})^2}{\mathcal{E}_{01}}$ est appelé énergie de recul car elle caractérise l'effet de recul de l'atome après l'absorption du photon.

d- Caractériser l'effet de recul par un écart relatif entre la fréquence du photon absorbé et la fréquence atomique $\dfrac{\nu - \nu_{12}}{\nu_{12}}$ en fonction de h,de ν_{12}, de m_1 et de c.
e- On suppose que l'on étudie l'effet de recul sur un atome de Césium ($m_1 = 2,1 \times 10^{-25}$ kg) dont l'écart entre deux niveaux correspond à une longueur d'onde : $\lambda_{12} = 894$ nm. Calculer l'écart relatif en fréquence. Conclure.

3. Métrique de Schwarzschild

On utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.
On s'intéresse aux trajectoires de photons à proximité d'un objet sphérique massif . On suppose que l'effet du champ gravitationnel de la masse M peut être représenté par une métrique de Schwarzschild :

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

où G est la constante de gravitation.
On pose : $x^0 = ct, x^1 = r$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = \varphi$
On a alors : $c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$

a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Calculer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.

b- *Pour la suite du problème, on considèrera le cas d'un photon.*
Que devient l'équation de la métrique ?

c- On rappelle que les symboles de Christoffel ont pour expression :

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\beta\sigma} \left(g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\sigma\alpha,\gamma} - g_{\alpha\gamma,\sigma}\right)$$

Calculer les différents symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ associés à la métrique avec $\beta = 3$

d- Soit ℓ un paramètre qui varie le long de la trajectoire du photon, on montre que l'équation des géodésiques s'écrit :

$$\frac{d^2 x^\beta}{dl^2} + \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\gamma}{dl} = 0$$

Déterminer l'équation des géodésiques associée à : $x^3 = \varphi$.
En déduire une constante du mouvement du photon dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et reste constant.

e- Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ reste constant, on montre que l'équation des géodésiques associée à : $x^1 = r$ peut s'écrire sous la forme :

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{d^2 r}{dl^2} + \frac{GM}{r^2} \left(\frac{dt}{dl}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2} \frac{GM}{c^2 r^2} \left(\frac{dr}{dl}\right)^2 - r \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)^2 = 0$$

Ecrire cette équation dans le cas d'une orbite circulaire pour le photon.

f- Comparer le résultat de la question **e-** avec celui obtenu à la question **b-** dans le cas d'une orbite circulaire et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire à quelle(s) condition(s) le photon peut avoir une trajectoire circulaire autour de la masse M.

g- On suppose à présent que le photon suit une trajectoire radiale par rapport à la masse M. Ecrire l'équation de la métrique dans cette configuration. En déduire l'expression de $\dfrac{dr}{dt}$ en fonction de G, M, r et c. Commenter le cas où $r \to \dfrac{2GM}{c^2}$ (on considèrera par exemple le cas d'un photon émis par la masse M).

h- On effectue le changement de coordonnées (dites coordonnées de Kruskal) suivant :

$$u = \left(\frac{c^2 r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{c^2 r}{4GM}\right) \cosh\left(\frac{c^3 t}{2GM}\right)$$
$$v = \left(\frac{c^2 r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{c^2 r}{4GM}\right) \sinh\left(\frac{c^3 t}{2GM}\right)$$

On montre qu'avec ce changement de coordonnées, la métrique s'écrit (expression admise, on ne demande pas de la vérifier) :

$$c^2 d\tau^2 = -\left(\frac{32(GM)^3}{c^6 r}\right) \exp\left(-\frac{c^2 r}{2GM}\right) (du^2 - dv^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Dans ces coordonnées, déterminer la relation issue de la métrique pour le cas d'une trajectoire radiale d'un photon. Comparer le résultat obtenu avec ceux de la question **g-**. Conclure.

Master de Physique 1ère année

Jeudi 07 janvier 2016

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Mesures relativistes par une horloge optique

a.1- $\delta\tau_0 = \sqrt{1-\beta^2}\delta t$
a.2- $f = \sqrt{1-\beta^2} f_0$
a.3- Estimer numériquement la valeur de β. Donner l'expression de f en fonction de f_0 au deuxième ordre en β.
$\beta \approx \dfrac{30}{300000000} = 0.0000001 \ll 1.$ $\quad f \approx \left(1 - \dfrac{\beta^2}{2}\right) f_0$
a.4- Que devient cette expression si : $v < 0$?
$f \approx \left(1 - \dfrac{\beta^2}{2}\right) f_0$ La partie relativiste de l'effet Doppler ne change pas de signe.
b.1- $\dfrac{\Delta f}{f_0} \approx 0,1\ 10^{-15}$ $\quad \dfrac{\Delta v}{v_0} \approx 0,1$
b.2- $\dfrac{\delta f}{f_0} = -\dfrac{\beta^2}{2} = -0,5\ 10^{-14}$ $\quad$ pour $v = 30$ m.s^{-1}. C'est compatible avec la courbe (les autres points aussi sont corrects.
c.1- $U = -\dfrac{GM}{R} = -\dfrac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6400000} = -6.2531 \times 10^7$ m.s^{-1} $\left|\dfrac{U}{c^2}\right| \ll 1$
Vérifier que l'on a bien : $\dfrac{U}{c^2} \ll 1$. Justifier alors que la différence de potentiel gravitationnel entre deux horloges séparées d'une hauteur Δh puisse s'écrire au premier ordre :

$$\Delta U \approx g\Delta h$$

$g = -\dfrac{GM}{R^2} = -\dfrac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6400000^2} = -9.8$ m.s^{-2}
c.2 et 3-

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Les horloges sont fixes. On a donc : $c^2 d\tau_1^2 = \left(1 + \dfrac{2U_1}{c^2}\right) c^2 dt^2$ et $c^2 d\tau_2^2 = \left(1 + \dfrac{2U_2}{c^2}\right) c^2 dt^2$

Donc : $\dfrac{d\tau_1}{d\tau_2} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{2U_1}{c^2}}{1 + \dfrac{2U_2}{c^2}}} = \dfrac{f_2}{f_1}$
$\dfrac{\delta f}{f_1} = \dfrac{f_2}{f_1} - 1 = \dfrac{U_1 - U_2}{c^2} = -\dfrac{\delta U}{c^2} = -\dfrac{g\delta h}{c^2}$

d.1- $\dfrac{\delta f}{f_1} = -0,4\ 10^{-16} \qquad \delta h = \dfrac{0.4\times 10^{-16}\times 9\times 10^{16}}{9.8} = 0.37$ m

d.2- Compte-tenu des barres d'erreur élevées, l'expérience est concluante.

2. Effet de recul d'un atome absorbant un photon

a- $\mathcal{E}_{01} = m_1\ c^2$

b- La conservation de la quadri-impulsion impose :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_\varphi \qquad \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_\varphi = \sqrt{\mathcal{E}_{02}^2 + \overrightarrow{p}^2 c^2}$$

c- Soit : $\mathcal{E}_{01}^2 + 2\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_{02}^2$, c'est-à-dire :

$\mathcal{E}_\varphi = (\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01})\left(1 + \dfrac{\mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{01}}{2\mathcal{E}_{01}}\right)$

$\alpha = \dfrac{1}{2}$

d-

$\dfrac{\nu - \nu_{12}}{\nu_{12}} = \dfrac{h\nu_{12}}{2m_1c^2}$

e- On suppose que l'on étudie l'effet de recul sur un atome de Césium ($m_1 = 2,1\times 10^{-25}$ kg) dont l'écart entre deux niveaux correspond à une longueur d'onde : $\lambda_{12} = 894$ nm. Calculer l'écart relatif en fréquence. Conclure.

$\frac{6.63\times 10^{-34}\times 3\times 10^{8}}{894\times 10^{-9}\times 2\times 2.1\times 10^{-25}\times (3\times 10^{8})^2} = 5.9\times 10^{-12}$

C'est très difficile à observer.

3. Métrique de Schwarzschild

$$c^2d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\ d\varphi^2$$

a-

$g^{00} = \left(1 - \dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \qquad g^{11} = -\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2r}\right) \qquad g^{22} = -\dfrac{1}{r^2} \qquad g^{33} = -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}$

b-

$\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\ d\varphi^2 = 0$

c-

$\Gamma_\alpha{}^3{}_\gamma = \dfrac{1}{2}g^{33}\left(g_{3\gamma,\alpha} + g_{3\alpha,\gamma} - g_{\alpha\gamma,3}\right) = 0 \qquad$ sauf

$\Gamma_3{}^3{}_1 = \Gamma_1{}^3{}_3 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(-2r\sin^2\theta\right) = \dfrac{1}{r}$

$\Gamma_3{}^3{}_2 = \Gamma_2{}^3{}_3 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(-r^2\sin\theta\cos\theta\right) = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

d-

$\dfrac{d^2\varphi}{dl^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{dl}\dfrac{d\varphi}{dl} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{d\theta}{dl}\dfrac{d\varphi}{dl} = 0$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{d^2\varphi}{dl^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{dl}\dfrac{d\varphi}{dl} = 0 \Rightarrow r^2\dfrac{d\varphi}{dl} = cons\tan te$

e-

Orbite circulaire $\Leftrightarrow dr = 0$

$$\frac{GM}{r^2}\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 - r\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)^2 = 0$$

f-

b- donne dans le cas d'une orbite circulaire et $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2\ d\varphi^2 = 0$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2}{r^2} \Leftrightarrow r = \frac{3GM}{c^2}$$

g-

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c$$

Il y a une singularité en $r \to \frac{2GM}{c^2}$.

h-

Les trajectoires radiales ont pour équations : $u = \pm v$. Il n'y a plus de singularitéen $r \to \frac{2GM}{c^2}$.