Master de Physique 1ère année/CPES PSL

Jeudi 08 janvier 2015

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*

* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, \ldots$ tandis que les vecteurs classiques à trois composantes seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \ldots$

De même, on utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.

* Soit $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re}$ la vitesse d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.

On suppose que : $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re} = V_{\Re'/\Re}\ \overrightarrow{e_x}$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vecteur de base de l'axe Ox.

On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ;\ dy' = dy\,;\ dz' = dz$$

* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}

Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C

1. Production d'une paire proton-antiproton

On produit une paire proton-antiproton par collision d'un proton projectile et d'un proton cible, en réalisant la réaction :

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \overline{p})$$

On donne les énergies de masse des particules : $m_p c^2 = 938,3$ MeV

a- Quelles sont les quantités physiques conservées au cours de la collision quel que soit le référentiel considéré ?

b- Définir le référentiel $\Re'$ de centre de masse des deux protons incidents.

c- Dans $\Re'$, déterminer l'énergie E'_s minimale totale de l'ensemble des deux protons nécessaire pour que la réaction ait lieu en fonction des données du problème. Application numérique.

d- On suppose que la réaction se produit dans le référentiel $\Re$ du laboratoire où un des deux protons initiaux, appelé proton-cible, est au repos. On définira soigneusement toutes les notations choisies. Déterminer l'énergie E_m totale minimale du proton incident. Application numérique.

e- Dans la suite, on suppose que, dans $\Re$, le proton cible n'est plus au repos et que les deux protons, que l'on nommera désormais proton 1 et proton 2, sont en mouvement. Un des protons a, dans ce référentiel, une énergie cinétique de $T_2 = 30$ MeV. On appelle E_2 l'énergie totale du proton 2 associée. De même, on appelle p_1 et p_2 les impulsions des deux protons dans ce référentiel et E_1 l'énergie totale du proton 1. Déterminer, dans ce référentiel, les équations, pour chaque proton avant le choc, reliant l'énergie totale, l'impulsion et l'énergie de masse du proton.
f- On suppose que la réaction peut avoir lieu, quelle inégalité peut-on écrire concernant la norme du quadrivecteur énergie-impulsion totales pour les deux protons ?
En déduire que :

$$p_1^2\, p_2^2\, c^4 \geq \left(7m_p^2c^4 - E_1E_2\right)^2$$

g- A partir des résultats des deux questions précédentes, montrer que l'énergie totale E_1 du proton 1 dans $\Re$ satisfait à l'inégalité suivante :

$$E_1^2 - 14\; E_2\; E_1 + E_2^2 + \alpha \leq 0$$

α étant une quantité que l'on déterminera en fonction de m_pc^2
h- Vérifier que l'inégalité précédente est vérifiée si :

$$7E_2 + \left[48\left(E_2^2 - m_p^2c^4\right)\right]^{1/2} \geq E_1 \geq 7E_2 - \left[48\left(E_2^2 - m_p^2c^4\right)\right]^{1/2}$$

Application numérique : calculer la valeur de E_1 minimale pour que la réaction ait lieu.
i- Retrouver, à l'aide de l'expression précédente, l'expression obtenue en **(c)**.

2. Test de la dilatation des temps

Sascha Reinhardt et ses collaborateurs ont effectué en 2007 une expérience vérifiant le phénomène de dilatation des temps (Nature Physics, 2007, volume 3, 861) ou plus exactement l'influence de la dilatation des temps sur l'effet Doppler. L'expérience consiste à mesurer l'effet Doppler sur une raie particulière d'ions $^7Li^+$ accélérés dans un accélérateur en "anneau" jusqu'à atteindre $3,0\%$ et $6,4\%$ de la vitesse de la lumière. Deux faisceaux laser accordés à une raie d'absorption des ions sont envoyés sur les ions dans des directions opposées : une direction correspondant à la direction de propagation des ions et une direction contre-propageante (voir schéma).

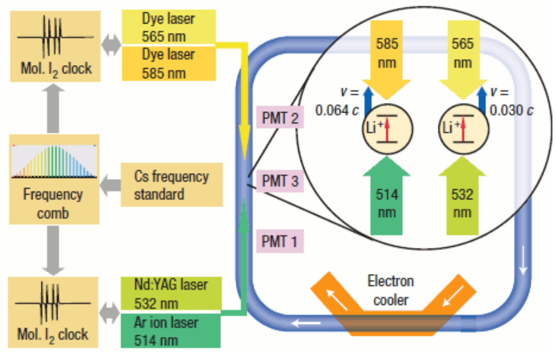
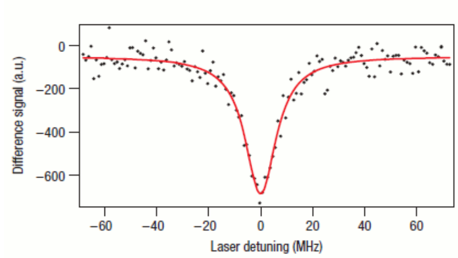


Figure 1 Schematic diagram of the TSR. Li^+ ions circulate in the 55-m-circumference ring. In the electron cooler, cold electrons are overlapped with the ions and provide cooling. The measurements at the two different velocities are carried out sequentially. In the experiment, the two lasers are coupled into the ring from the same side and are retro-reflected.

Si les émissions des lasers sont correctement décalées de l'effet Doppler, il est observé un pic d'absorption de la part des ions (exemple de courbe expérimentale ci-dessous).



a- Déterminer, par la méthode de votre choix, la relation entre la fréquence ν_0 de la raie d'absorption de l'ion $^7\mathrm{Li}^+$ quand il est au repos et la fréquence ν' d'absorption de l'ion dans le référentiel où il se déplace dans la direction Ox de la ligne de visée à la vitesse (positive ou négative) $v = \beta c$. On fera un schéma pour expliciter les notations choisies et le sens du mouvement.

b- Déterminer l'expression en fonction de β, γ et ν_0 de la fréquence ν_p du laser se propageant dans le sens des ions et de la fréquence ν_a du laser se propageant en sens inverse des ions dans le cas de l'extremum du pic d'absorption.

c- Déterminer l'expression du rapport : $\dfrac{\nu_p \nu_a}{\nu_0^2}$ en fonction des données du problème.

d- L'expérience de 2007 utilise la raie de fréquence au repos : $\nu_0 = 546\,466\,918\,531 \pm 73$ kHz
Pour $\beta_1 = 0,030$ l'équipe a mesuré : $\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}} = 546\,466\,918\,577 \pm 108$ kHz
Pour $\beta_2 = 0,064$ l'équipe a mesuré : $\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}} = 546\,466\,918\,493 \pm 98$ kHz
A quelle précision relative, le calcul d'effet Doppler relativiste est-il vérifié[1] ? Laquelle des deux expériences donne la meilleure précision ?

[1] La mesure a été refaite en 2014 par la même équipe (PRL, 2014, 113, 120405) en utilisant les mêmes ions à une vitesse plus grande ($\beta = 0,338$) et une technique de mesure spectroscopique plus fine (résonance Λ). Ils ont testé le principe de dilatation des temps à une précision plus de dix fois meilleure qu'en 2007.

3. Vitesse à l'horizon d'un trou noir (Interstellar)

On suppose que l'effet du champ gravitationnel d'un trou noir peut être représenté par une métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

où G est la constante de gravitation et M la masse du trou noir.
a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

b- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^0 = ct$. Montrer que que l'équation de la géodésique s'écrit sous la forme :

$$Ac\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dA}{ds}\frac{cdt}{ds} = 0$$

A étant une quantité que l'on déterminera en fonction de G, M r et c.
c- En déduire que l'on a :

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{cdt}{ds} = Q \qquad \text{avec} \qquad Q \text{ constante}$$

Soit une particule au repos à l'infini qui tombe de façon radiale sur le trou noir. On a alors :
* $d\theta = d\varphi = 0$
* $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{cdt}{ds} = 1$

d- Donner des arguments justifiant la deuxième égalité.
e- A partir des deux conditions données ci-dessus et de l'expression de la métrique, exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de G, M r et c.
f- On appelle l'horizon d'un trou noir le rayon $r_h = \frac{2GM}{c^2}$. Que devient la vitesse observée de la particule quand elle approche de l'horizon ? Commenter.

Master de Physique 1ère année/CPES PSL

Jeudi 08 janvier 2015

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Production d'une paire proton-antiproton

On produit une paire proton-antiproton par collision d'un proton projectile et d'un proton cible, en réalisant la réaction :

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \overline{p})$$

On donne les énergies de masse des particules : $m_p c^2 = 938,3$ MeV
a- Au cours de la collision, il y a conservation du quadrivecteur impulsion-énergie. Sa norme est donc conservée, ainsi que ses composantes : l'énergie et le vecteur impulsion sont conservés.
b- Dans référentiel $\Re$ de centre de masse des deux protons, l'impulsion totale est nulle.
c- $E'_s = 4m_p c^2 = 3753,2$ MeV
d- On suppose que la réaction se produit dans le référentiel $\Re$ du laboratoire où un des deux protons initiaux, appelé proton-cible, est au repos. On définira soigneusement toutes les notations choisies. Déterminer l'énergie E_m totale minimale du proton incident. Application numérique.
On a : $(E_m + m_p c^2)^2 - q^2 c^2 = (4m_p c^2)^2$
avec q impulsion du photon incident.
Or on a par ailleurs (norme du quadrivecteur énergie-impulsion du photon incident) : $(E_m)^2 - q^2 c^2 = (m_p c^2)^2$
$(E_m + m_p c^2)^2 - (E_m)^2 + (m_p c^2)^2 = (4m_p c^2)^2$
$2E_m\, m_p c^2 + 2\,(m_p c^2)^2 = 16\,(m_p c^2)^2$
$E_m = 7m_p c^2 = 6568,1$ MeV
e- Dans la suite, on suppose que, dans $\Re$, le proton cible n'est plus au repos et que les deux protons, que l'on nommera désormais proton 1 et proton 2, sont en mouvement. Un des protons a, dans ce référentiel, une énergie cinétique de $T_2 = 30$ MeV. On appelle E_2 l'énergie totale du proton 2 associée. De même, on appelle p_1 et p_2 les impulsions des deux protons dans ce référentiel et E_1 l'énergie totale du proton 1. Déterminer, dans ce référentiel, les équations pour chaque proton avant le choc, l'énergie totale, l'impulsion et l'énergie de masse du proton.
$(E_1)^2 - p_1^2 c^2 = (m_p c^2)^2$
$(E_2)^2 - p_2^2 c^2 = (m_p c^2)^2$
Avec $E_2 = T_2 + m_p c^2$
f- On suppose que la réaction peut avoir lieu, quelle inégalité peut-on écrire concernant la norme du quadrivecteur énergie-impulsion totales pour les deux protons ?

On a : $(E_1+E_2)^2-(p_1-p_2)^2 c^2 \geq (4m_pc^2)^2$
$(E_1)^2-p_1^2c^2+(E_2)^2-p_2^2c^2+2E_1E_2+2p_1\,p_2\,c^2 \geq 16\,(m_pc^2)^2$
$2E_1E_2+2p_1\,p_2\,c^2 \geq 14\,(m_pc^2)^2$
$p_1^2\,p_2^2\,c^4 \geq \left(7m_p^2c^4-E_1E_2\right)^2$
g- $p_1^2\,p_2^2\,c^4 \geq \left(7m_p^2c^4-E_1E_2\right)^2$
$\left((E_1)^2-(m_pc^2)^2\right)\left((E_2)^2-(m_pc^2)^2\right) \geq \left(7m_p^2c^4-E_1E_2\right)^2$
$(E_1)^2\,(E_2)^2-(m_pc^2)^2\left((E_1)^2+(E_2)^2\right)+(m_pc^2)^4 \geq 49\,(m_pc^2)^4-14m_p^2c^4E_1E_2+(E_1)^2\,(E_2)^2$
$E_1^2-14\,E_2\,E_1+E_2^2+\alpha \leq 0$
avec $\alpha = 48m_p^2c^4$
h- $7E_2+\left[48\left(E_2^2-m_p^2c^4\right)\right]^{1/2}$ et $7E_2-\left[48\left(E_2^2-m_p^2c^4\right)\right]^{1/2}$ sont les solutions de l'équation du second degré : $E_1^2-14\,E_2\,E_1+E_2^2+48m_p^2c^4=0$
Donc, si on veut : $E_1^2-14\,E_2\,E_1+E_2^2+\alpha \leq 0$
Il faut que :
$7E_2+\left[48\left(E_2^2-m_p^2c^4\right)\right]^{1/2} \geq E_1 \geq 7E_2-\left[48\left(E_2^2-m_p^2c^4\right)\right]^{1/2}$
$E_{1\,\min} = 5,12$ GeV
i- L'expression obtenue en **(c)** correspond au cas où $E_2 = m_pc^2$.
On a alors : $E_1 \geq 7E_2-\left[48\left(E_2^2-m_p^2c^4\right)\right]^{1/2} = 7\,(m_pc^2)-[48\times 0]^{1/2} = E_m$

2. Test de la dilatation des temps

Sascha Reinhardt et ses collaborateurs ont effectué en 2007 une expérience sur la dilatation des temps (Nature Physics, 2007, volume 3, 861). L'expérience consiste à mesurer l'effet Doppler sur une raie particulière d'ions $^7Li^+$ qui sont accélérés dans un accélérateur en "anneau" jusqu'à atteindre $3,0\%$ et $6,4\%$ de la vitesse de la lumière.
a- Dans le référentiel du laboratoire $\Re'$, la période du signal laser $\Delta t'$ reçu par les ions doit correspondre, au premier ordre, à la période au repos de la raie des ions $^7Li^+$ $\Delta t'_0$ suivant la relation :

$$\Delta t' = \Delta t'_0 - \frac{v}{c}\,\Delta t'_0$$

Or, avec les transformations de Lorentz pour passer dans $\Re$, référentiel comobile avec les ions $^7Li^+$,on a :

$$\Delta t'_0 = \gamma \Delta t_0$$

On en déduit immédiatement :

$$\Delta t' = \gamma\,(1-\beta)\,\Delta t_0$$

Soit encore, en terme de fréquences :

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\gamma\,(1-\beta)}$$

b- Déterminer l'expression en fonction de β, γ et ν_0 de la fréquence ν_p du laser se propageant dans le sens des ions et de la fréquence ν_a du laser se propageant en sens inverse des ions dans le cas de l'extremum du pic d'absorption.
ν_p correspond au cas où $v = \beta c > 0$: $\nu_p = \dfrac{\nu_0}{\gamma(1-\beta)}$
ν_a correspond au cas où $v = \beta c < 0$: $\nu_a = \dfrac{\nu_0}{\gamma(1+\beta)}$
c- $\dfrac{\nu_p \nu_a}{\nu_0^2} = \dfrac{\nu_0}{\gamma\left(1-\beta^2\right)} = 1$
d- L'expérience de 2007 utilise la raie de fréquence au repos : $\nu_0 = 546\,466\,918\,531 \pm 73$ kHz
Pour $\beta_1 = 0,030$ l'équipe a mesuré : $\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}} = 546\,466\,918\,577 \pm 108$ kHz
Les deux mesures sont indépendantes, donc on a : $\dfrac{\Delta\nu_1}{\nu_0} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta\nu_0}{\nu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}}}{\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}}}\right)^2}$

$\dfrac{\Delta\nu_1}{\nu_0} = \sqrt{\left(\dfrac{73}{546\,466\,918\,531}\right)^2 + \left(\dfrac{108}{546\,466\,918\,577}\right)^2} = 2.\,39 \times 10^{-10}$
Version pessimiste : $\dfrac{\Delta\nu_1'}{\nu_0} = \dfrac{\Delta\nu_0}{\nu_0} + \dfrac{\Delta\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}}}{\sqrt{\nu_{p1}\nu_{a1}}} = \dfrac{73}{546\,466\,918\,531} + \dfrac{108}{546\,466\,918\,577} = 3.\,31 \times 10^{-10}$
Pour $\beta_2 = 0,064$ l'équipe a mesuré : $\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}} = 546\,466\,918\,493 \pm 98$ kHz
Les deux mesures sont indépendantes, donc on a : $\dfrac{\Delta\nu_2}{\nu_0} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta\nu_0}{\nu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}}}{\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}}}\right)^2}$

$\dfrac{\Delta\nu_2}{\nu_0} = \sqrt{\left(\dfrac{73}{546\,466\,918\,531}\right)^2 + \left(\dfrac{98}{546\,466\,918\,493}\right)^2} = 2.\,24 \times 10^{-10}$
Version pessimiste : $\dfrac{\Delta\nu_2'}{\nu_0} = \dfrac{\Delta\nu_0}{\nu_0} + \dfrac{\Delta\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}}}{\sqrt{\nu_{p2}\nu_{a2}}} = \dfrac{73}{546\,466\,918\,531} + \dfrac{98}{546\,466\,918\,493} = 3.\,13 \times 10^{-10}$
Le deuxième mesure est légèrement meilleure que la première parce que les ions vont plus vite : les effets relativistes n'en sont que plus forts et donc détectables.

3. Vitesse à l'horizon d'un trou noir

a- - $g_{00} = \dfrac{1}{g^{00}} = \left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)$
$g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}} = -\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$
$g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}} = -r^2$
$g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}} = -r^2 \sin^2\theta$
Les autres termes de la métrique sont nuls.
b- *Equation en* $x^0 = ct$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^{\;0}_{\alpha\;\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont :

$$\Gamma^{0}_{0\,1} = \Gamma^{0}_{1\,0} = \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{01,0} + g_{00,1} - g_{10,0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,1}$$

$$\Gamma^{0}_{0\,1} = \Gamma^{0}_{1\,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \frac{d\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}{dr} = \frac{1}{2} \frac{1}{A} \frac{dA}{dr}$$

avec $A = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$

L'équation de géodésique devient :

$$c\frac{d^2t}{ds^2} + c\frac{1}{A}\frac{dA}{dr}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 = A\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dA}{ds}\frac{dt}{ds}$$

c- $\frac{d}{ds}\left(\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{dt}{ds}\right) = 0$

$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{dt}{ds} = Q \qquad \text{avec} \qquad Q \text{ constante}$

On obtient ainsi une intégrale première du mouvement.

d- A l'infini, la particule est au repos, elle ne subit aucune interaction, elle est donc dans son référentiel propre dans une métrique minkowskienne.

$1 - \frac{2GM}{rc^2} \approx 1$ et $\frac{cdt}{ds} \approx 1$

e- $\frac{dr}{dt}$ en fonction de G, M r et c.

$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^2 c^2dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2$

$\frac{2GM}{rc^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^2 c^2dt^2 = dr^2$

$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}$

f- La vitesse s'annule. Pour un observateur extérieur, la particule n'atteint jamais le trou noir. (Dans le référentiel de l'horizon, elle l'atteint avec la vitesse de la lumière...)