Jeudi 14 décembre 2017

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h

Remarques préliminaires

**Les documents, les laptops et les téléphones seront interdits. Les calculatrices seront autorisées à condition qu'elles soient autonomes (sans connexion internet). Les copies et feuilles de brouillon sont fournies.*

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*

* Soit $V_{\Re'/\Re}$ la vitesse (algébrique) d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.

On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ; dy' = dy \, ; \, dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$

* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}

Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C

Constante gravitationnelle : $G = 6,67384 \times 10^{-11}$ u.s.i.

* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, \ldots$ tandis que les vecteurs classiques à trois composantes seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \ldots$

De même, on utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.

1. Histoire de trains

Deux trains identiques, notés 1 et 2, de longueur propre L, circulent à vitesse constante dans deux directions opposées. On note A_i et B_i $(i = 1$ ou $2)$ respectivement les extrémités avant et arrière de chacun de ces deux trains au niveau des rails.

On considère trois référentiels : le référentiel $\Re$ associé aux rails ; le référentiel $\Re'$ associé au premier train animé d'une vitesse $v_1 = v' = \beta' c$ $(\beta' \geq 0)$ par rapport à $\Re$; le référentiel $\Re''$ associé au deuxième train animé d'une vitesse $v_2 = v'' = \beta'' c$ $(\beta'' \leq 0)$ par rapport à $\Re$. L'origine $O = O' = O''$ de ces trois référentiels correspond à l'événement : A_1et A_2 se croisent et coïncident. L'axe $Ox = Ox' = Ox''$ est le même pour les trois référentiels est correspond

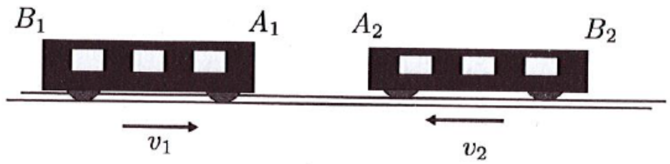


FIG. 1 – Deux trains en direction opposée

à l'axe des rails. Pour l'ensemble de l'exercice, les événements se produisent uniquement sur cet axe ($y = z = y' = z' = y'' = z'' = 0$).
a- Donner la position x'_{B1} dans $\Re'$ en fonction de L. En déduire, par transformation de Lorentz, la position de B_1 à l'instant $t_{B1} = 0$ dans $\Re$ en fonction de L et γ'. De même, donner la position x''_{B2} dans $\Re''$, en déduire la position de B_2 à l'instant $t_{B2} = 0$ dans $\Re$ en fonction de L et γ''. Expliquer le fait que, dans certains livres, les auteurs parlent, dans ce cas, d'un phénomène de contraction des longueurs.
b- Connaissant les vitesses des deux trains, déterminer la position de l'avant du premier train x_{A1} à un instant t quelconque dans le référentiel $\Re$.en fonction des données de l'exercice. De même, déterminer à l'instant t, la position de l'arrière du deuxième train B_2 à un instant t quelconque dans le référentiel $\Re$.
c- Déterminer les coordonnées dans $\Re$ de l'événement E correspondant au croisement de A_1 avec B_2. En déduire les coordonnées de E dans $\Re'$ et $\Re''$.
d- A partir de la formule de la composition des vitesses (démonstration non demandée), déterminer la vitesse v_{12} du premier train dans $\Re''$ en fonction de c, v' et v''. En déduire l'expression de γ_{12} en fonction de γ', γ'', β' et β''.
e- A partir du résultat de la question précédente, retrouver directement les coordonnées de l'événement E dans $\Re''$ et vérifier qu'elles sont identiques à celles obtenues en (**c**).
Question bonus :
f- Déterminer les coordonnées dans $\Re$ de l'événement F correspondant au croisement de A_2 avec B_1. En déduire les coordonnées de F dans $\Re'$ et $\Re''$. Déterminer la chronologie des deux événements E et F dans chaque référentiel.

2. Production d'un deuton par une collision proton-proton

Il est possible de produire un deuton d en réalisant une collision entre deux protons p . Cette réaction produit aussi un pion π^+.

$$p + p \rightarrow d + \pi^+$$

On donne les énergies de masse des particules : $m_p c^2 = 938,3$ MeV $\qquad m_d c^2 = 1875,6$ MeV $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV
a- Quelles sont les quantités physiques conservées au cours de la collision quel que soit le référentiel considéré ?
b- Quelles sont les propriétés du référentiel $\Re$ de centre de masse des deux protons ?
c- Dans $\Re$, déterminer l'énergie cinétique totale minimale nécessaire pour les deux protons E_s pour que la réaction puisse avoir lieu.

d- On suppose que la réaction se produit dans le référentiel $\Re'$ du laboratoire où un des deux protons initiaux, appelé proton-cible, est au repos. Déterminer l'énergie cinétique minimale T_m à donner au proton incident pour que la réaction puisse avoir lieu. On définira soigneusement toutes les notations utilisées.

3. Géodésie chronométrique relativiste

A- *Approximation en champ faible*

Pour une masse ponctuelle M, à une distance r où le champ est faible $\left(\dfrac{GM}{rc^2} \ll 1\right)$, il est possible de montrer que, pour des vitesses faibles $\left(\dfrac{v}{c} \ll 1\right)$, la métrique peut s'écrire, au premier ordre, sous la forme :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
Les géodésiques vont suivre les équations :

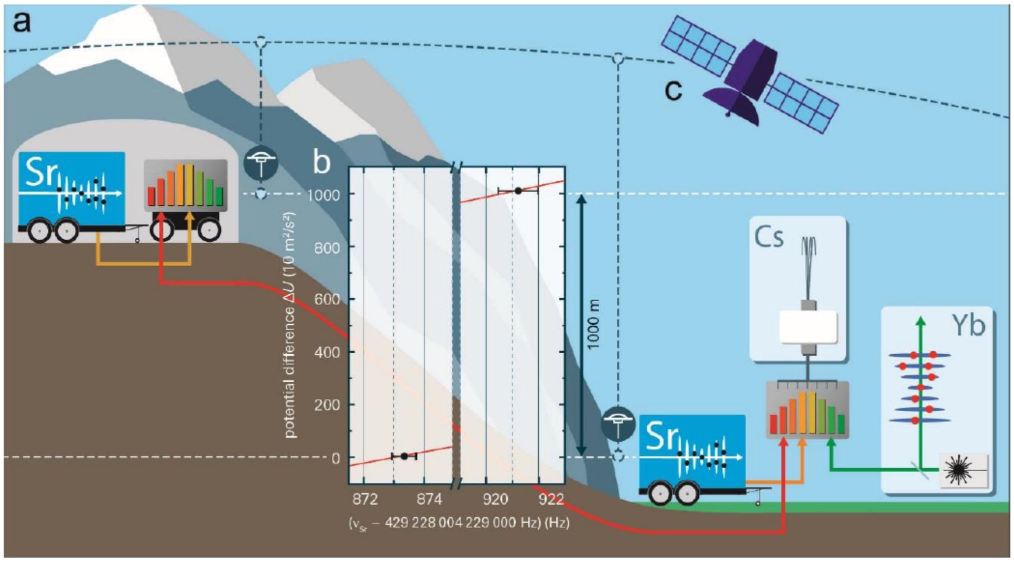
$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

b- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^1 = r$.
c- La Terre a une masse $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg et un rayon $R_T = 6400$ km.
c.1- Vérifier numériquement qu'à la surface de la Terre, le champ de gravité peut être considéré comme faible. On suppose qu'avec une Terre sphérique la métrique donnée dans l'exercice est encore une bonne approximation à la surface de la Terre.
c.2- Dans le cas où l'on fait tomber radialement une masse ponctuelle à la surface de la Terre, déterminer l'expression de la géodésique calculée précédemment en fonction de : $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$.
Comme il s'agit d'une chute d'un corps à la surface de la Terre, on supposera que : $r \approx R_T$ et que $dr \neq 0$ représente une chute de très faible amplitude aux alentours du rayon terrestre.
c.3- On pose : $ds = c\, d\tau$, avec τ temps propre associé à la masse qui tombe. Donner, dans le cadre de l'approximation en champ faible et des vitesses faibles, la relation entre $d\tau$ et dt. Résoudre l'équation obtenue sous la forme d'une relation entre r, g et t.

B- *Mesure de g*

En 2017, Jacopo Grotti et ses collaborateurs ont effectué une expérience dans les Alpes pour déterminer le potentiel gravitationnel terrestre à partir de mesures de fréquence d'horloges atomiques. Dans ce but, ils ont placé une horloge au sommet d'une montagne et une autre identique, au niveau de la mer (voir figure ci-dessous). Ainsi que l'indiquent les points de la figure, la différence de potentiel gravitationnel terrestre entre le sommet (S) et le niveau de la mer (M) vaut : $\delta U = U_S - U_M = -10\,000$ m^2/s^2.

a- Exprimer la variation de fréquence entre les deux horloges : $\dfrac{\delta f}{f_M} = \dfrac{f_S - f_M}{f_M}$ de fréquence entre les deux horloges en fonction de U_M et de U_S.



b- En prenant en compte le fait que $\dfrac{U}{c^2} \ll 1$, déterminer $\dfrac{\delta f}{f_M}$ au premier ordre en fonction de δU. Application numérique.

c- La comparaison des fréquences d'horloges atomiques usuelles au Césium s'effectue à une précision relative de l'ordre de : $\dfrac{\delta f}{f} \approx 10^{-13}$. Justifier le fait que, pour être en capacité de mesurer les variations de potentiel gravitationnel terrestre avec des horloges (géodésie chronométrique relativiste), les chercheurs ont dû utiliser des horloges d'un nouveau type (au Strontium) avec un lien de comparaison amélioré pour atteindre une précision de : $\dfrac{\delta f}{f} \approx 2.10^{-15}$.

Jeudi 14 décembre 2017

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Histoire de trains

a- A l'instant : $t_{B1} = 0$,
$x'_{B1} = -L = \gamma'(x_{B1} - 0)$
$x_{B1} = -\dfrac{L}{\gamma'}$ dans $\Re$.
De même : $x''_{B2} = L$
A l'instant : $t_{B2} = 0$, $x_{B2} = \dfrac{L}{\gamma''}$
Or $\gamma' \geq 1$ et $\gamma'' \geq 1$, dans ce cas, à $t = 0$, les deux trains sont observés dans $\Re$ à une taille inférieure à L.
b-
$x_{A1} = v't$
$x_{B2} = \dfrac{L}{\gamma''} + v''t$
c-
Il faut que : $x_{A1} = x_{B2}$ donc $t_E = \dfrac{L}{\gamma''(\beta' - \beta'')c}$ et on en déduit : $x_E = x_{B2} = x_{A1} = \dfrac{\beta' L}{\gamma''(\beta' - \beta'')}$
Dans $\Re'$:
$t'_E = \dfrac{L}{\gamma'\gamma''(\beta' - \beta'')c}$ et $x'_E = 0$
Dans $\Re''$:
$t''_E = \dfrac{1 - \beta'\beta''}{(\beta' - \beta'')c} L$ et $x''_E = L$
d-
$v_{12} = \dfrac{v' - v''}{1 - \dfrac{v'v''}{c^2}}$ et $\gamma_{12} = \gamma'\gamma''(1 - \beta'\beta'')$
e- On retrouve immédiatement : $t''_E = \dfrac{1 - \beta'\beta''}{(\beta' - \beta'')c} L$ et $x''_E = L$
Question bonus :
f- Dans $\Re$:
$t_F = \dfrac{L}{\gamma'(\beta' - \beta'')c}$ et $x_F = -\dfrac{\beta'' L}{\gamma'(\beta' - \beta'')}$
Dans $\Re'$:
$t'_E = \dfrac{1 - \beta'\beta''}{(\beta' - \beta'')c} L$ et $x'_E = -L$

Dans $\Re''$:
$t''_E = \dfrac{L}{\gamma'\gamma''(\beta' - \beta'')c}$ et $x''_E = 0$
Dans $\Re$, E et F vont se suivre dans un ordre qui dépend de la valeur des vitesses.
Dans $\Re'$, E se produit avant F.
Dans $\Re''$, c'est l'inverse. Cela peut s'expliquer en raisonnant avec la contraction des longueurs dans chaque référentiel où un train est fixe et l'autre en mouvement.

2. Production d'un deuton par une collision proton-proton

$$p + p \rightarrow d + \pi^+$$

$m_p c^2 = 938,3$ MeV $\qquad m_d c^2 = 1875,6$ MeV $\qquad m_\pi c^2 = 139,6$ MeV
a- Au cours de la collision, il y a conservation du quadrivecteur impulsion-énergie. Sa norme est donc conservée, ainsi que ses composantes : l'énergie et le vecteur impulsion sont conservés.
b- Dans référentiel $\Re$ de centre de masse des deux protons, l'impulsion totale est nulle.
c- Energie cinétique minimale : $E_s = m_d c^2 + m_\pi c^2 - 2 \times m_p c^2 = 1875,6 + 139,6 - 2 \times 938,3 = 138,6$ MeV
d-Dans $\Re$, l'énergie totale du système des deux protons est : $E = E_s + 2m_p c^2$
L'énergie totale du système dans $\Re'$ s'écrit : $E' = 2m_p c^2 + T_m$
La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion ne dépend pas du référentiel choisi. Comme, par définition, l'impulsion totale du système est nulle dans $\Re_I$, on a :

$$\left(\frac{2m_p c^2 + T_m}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\frac{2m_p c^2 + E_s}{c}\right)^2$$

avec q norme de l'impulsion du proton dans $\Re'$.
En développant cette relation, on obtient :

$$4\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2 - q^2 = 4\frac{m_p c^2 E_s}{c^2} + \left(\frac{E_s}{c}\right)^2$$

Or, d'après la pseudo-norme de la quadri-impulsion du deuxième proton on a :

$$q^2 = 2\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2$$

On en déduit que :

$$2\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} = 4\frac{m_p c^2 E_s}{c^2} + \left(\frac{E_s}{c}\right)^2$$

Cela signifie donc que, dans le référentiel $\Re'$, l'énergie cinétique minimale nécessaire pour obtenir la réaction vaut :

$$T_m = 2E_s + \frac{E_s^2}{2m_p c^2} = 2 \times 138,6 + \frac{138,6^2}{2 \times 938,3} = 287,4 \text{ MeV}$$

3. Géodésie chronométrique relativiste

A- *Approximation en champ faible*

Pour une masse ponctuelle M, à une distance r où le champ est faible $\left(\frac{GM}{rc^2} \ll 1\right)$, il est possible de montrer que, pour des vitesses faibles $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, la métrique peut s'écrire, au premier ordre, sous la forme :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.

$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$

$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -1$

$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2$

$g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -r^2 \sin^2\theta$

Les autres termes de la métrique sont nuls.

Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

b- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^1 = r$.

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont :

$$\Gamma^{\ 1}_{0\ 0} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,0} + g_{01,0} - g_{00,1}\right) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = \frac{1}{2}\frac{d\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}{dr} = \frac{GM}{r^2c^2}$$

$$\Gamma^{\ 1}_{2\ 2} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) = \frac{1}{2}\left(-2r\right) = -r$$

$$\Gamma^{\ 1}_{3\ 3} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}\right) = \frac{1}{2}A\left(-2r\sin^2\theta\right) = -r\sin^2\theta$$

L'équation de géodésique devient :

$$\frac{d^2r}{ds^2} + c^2\frac{GM}{r^2c^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

c- La Terre a une masse $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg et un rayon $R_T = 6400$ km.

c.1-

$\frac{GM_T}{R_Tc^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6400\times10^3\times9\times10^{16}} = 6.947\,916\,7 \times 10^{-10} \ll 1$

On est bien dans le cadre d'un champ faible à la surface de la Terre.

c.2- $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$

Pour une chute radiale, on a : $d\theta = d\varphi = 0$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + c^2\frac{GM}{r^2c^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 = \frac{d^2r}{ds^2} + g\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

c.3- On pose : $ds = c\, d\tau$, avec τ temps propre associé à la masse qui tombe. Donner, dans le cadre de l'approximation en champ faible et des vitesses faibles, la relation entre $d\tau$ et dt. Résoudre l'équation obtenue sous la forme d'une relation entre r, g et t.

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Or $dt = d\tau$

Donc on obtient : $\dfrac{d^2r}{d\tau^2} = -g$

Une solution de cette équation est :

$r = -\frac{1}{2}g\ t^2 + v_{init}\ t + r_{init}$

B- *Mesure de g*

$\delta U = U_S - U_M = -10\,000\ \mathrm{m^2/s^2}$.

a- Les horloges sont fixes. On a donc : $c^2d\tau_M^2 = \left(1 + \dfrac{2U_M}{c^2}\right)\ c^2dt^2$ et $c^2d\tau_S^2 = \left(1 + \dfrac{2U_S}{c^2}\right)\ c^2dt^2$

Donc : $\dfrac{d\tau_M}{d\tau_S} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{2U_M}{c^2}}{1 + \dfrac{2U_S}{c^2}}} = \dfrac{f_S}{f_M}$

$$\frac{\delta f}{f_M} = \frac{f_S - f_M}{f_M} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{2U_M}{c^2}}{1 + \dfrac{2U_S}{c^2}}} - 1$$

b- $\dfrac{\delta f}{f_M} = -\dfrac{\delta U}{c^2}$

Application numérique : $\dfrac{\delta f}{f_M} = \dfrac{10000}{299792458^2} = 1.112\,7 \times 10^{-13}$

c- Les horloges à Césium sont comparées à une précision du même ordre que l'écart de fréquence entre les deux horloges que l'on souhaite mesurer. C'est insuffisant. Les horloges à Strontium sont, par contre, en capacité de faire des mesures variations de potentiel gravitationnel terrestre avec une précision suffisante.