Jeudi 08 décembre 2016

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*
* Soit $V_{\Re'/\Re}$ la vitesse (algébrique) d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.
On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.
On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ;\ dy' = dy\,;\ dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$
$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$
* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}
Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C
* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, \ldots$ tandis que les vecteurs classiques à trois composantes seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \ldots$
De même, on utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.

1. Echo laser sur une fusée

Une fusée de longueur propre (dans le référentiel comobile $\Re'$) $\ell' = 100$ m ; s'éloigne de la Terre (au repos dans le référentiel $\Re$) avec un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse de norme $V = \beta c$. Elle est équipée de deux réflecteurs laser (ou miroirs), l'un situé à la tête et l'autre à l'arrière de l'appareil.
Lorsque la fusée est à une distance D de la Terre (dans le référentiel $\Re$), des opérateurs envoient un flash laser de fréquence $\nu_i = 5,9 \times 10^5$ GHz en direction de la fusée. Une partie de ce faisceau laser est réfléchie par le miroir de queue et est renvoyée en sens inverse vers la Terre où elle est détectée au bout d'un temps $T = 20$ s. Une autre partie du faisceau laser est renvoyée par le miroir de tête et est observée sur Terre avec un intervalle de temps $\Delta t = 0,74$ μs après le premier retour.
On suppose que les référentiels $\Re$ et $\Re'$ ont les mêmes origines correspondant spatialement au point $O = O'$ où se trouve l'observateur qui est aussi le point de départ de la fusée. Pour l'origine des temps, on choisit le temps $t_0 = t'_0 = 0$ au moment du départ de la fusée. Pour la

suite de l'exercice, les variables ayant un prime " ′ " correspondent à des quantités exprimées dans $\Re'$ tandis que les variables sans prime sont exprimées dans $\Re$. L'axe $Ox = O'x'$ est arbitrairement choisi dans la direction de déplacement de la fusée.
a- Déterminer dans $\Re'$ l'intervalle de temps aller-retour τ' d'une partie du faisceau laser entre le miroir de queue et le miroir de tête (mesuré par une horloge comobile avec la fusée située au miroir de queue) en fonction de ℓ' et de c. Exprimer sa valeur τ dans $\Re$ en fonction de β, de ℓ' et de c.
b- Dans $\Re$, déterminer le déplacement de la fusée d effectué pendant l'intervalle de temps τ en fonction de β, de ℓ' et de c.
c- Déduire des résultats précédents, l'expression de Δt en fonction de ℓ', β et c.

Vérifier que l'on a :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{2\ell'}{c}$$

d- Montrer qu'il est possible, en connaissant ℓ' et Δt, de mesurer la vitesse V de la fusée par rapport à la Terre. *Application numérique* : calculer β avec les données du problème.
e- On observe sur Terre que l'onde réfléchie a une fréquence ν_r inférieure à la fréquence incidente ν_i. Quel est le phénomène à l'origine de ce décalage en fréquence ? Si l'on appelle ν_i' la fréquence du signal laser incident reçu par un miroir de la fusée dans $\Re'$, donner, sans démonstration, la relation entre ν_i', ν_i et β.
f- On suppose que, lorsque l'onde se réfléchit sur le miroir, sa fréquence dans le référence $\Re'$ ne varie pas, en déduire que l'observateur sur Terre mesure :

$$\nu_r = \nu_i \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

g- *Application numérique* : le signal reçu a une fréquence $\nu_r = 4,8 \times 10^5$ GHz. La vitesse de la fusée déterminée à partir des mesures de ν_r et ν_i est-elle compatible avec celle obtenue par la méthode des deux réflexions du laser (on comparera la valeur de β obtenue dans les deux cas) ? Commenter : quelle est la méthode la plus fiable ?

2. Annihilation

Dans le référentiel du laboratoire $\Re$, un positron e^+ d'énergie E_+ et de quantité de mouvement (impulsion observée) $\overrightarrow{p_+} = p_+\,\overrightarrow{u_x}$ ($\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur de base pour l'axe Ox dans $\Re$) entre en collision avec un électron e^- au repos (énergie $E_- = E_0$ et $\overrightarrow{p_-} = \overrightarrow{0}$) avec $E_0 = 0,5$ MeV énergie de masse identique pour le positron et l'électron. Les deux particules s'annihilent et produisent deux photons γ_1 et γ_2 d'énergies respectives E_1 et E_2 et de quantité de mouvement respectives $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$. Les quadrivecteurs énergie-impulsion sont notés $\widetilde{P_+}$ pour le positron, $\widetilde{P_-}$ pour l'électron et $\widetilde{P_1}$ et $\widetilde{P_2}$ pour les deux photons.
a- Donner les équations de conservation liées à cette collision.
b- Ecrire l'expression des pseudo-normes au carré des quadrivecteurs énergie-impulsion de chaque particule en fonction des composantes dans le référentiel $\Re$, puis en fonction des caractéristiques des particules qui ne dépendent pas du référentiel.

c- On appelle $\Re'$ le référentiel de centre de masse (ou d'inertie) de vitesse $\overrightarrow{V}$ de $\Re'$ par rapport à $\Re$. On note avec un prime "'" les quantités définies précédemment lorsqu'elles sont exprimées dans ce référentiel (par exemple la quantité de mouvement et l'énergie du positron sont alors E'_+ et $\overrightarrow{p'_+} = p'_x\ \overrightarrow{u'_x}$). Exprimer les composantes des quadrivecteurs énergie-impulsion de l'électron et du positron dans $\Re'$ en fonction de celles dans $\Re$ et des paramètres β et γ tels que définis dans les remarques préliminaires avec $\overrightarrow{V} = \beta c\ \overrightarrow{u_x}$.
d- En déduire que la vitesse $\overrightarrow{V}$ de $\Re'$ par rapport à $\Re$ s'écrit :

$$\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{p_+}\ c^2}{E_+ + E_0}$$

Exprimer β et γ (tels que définis dans les remarques préliminaires) en fonction de E_+ et E_0.
e- Calculer les énergies de toutes les particules avant et après la collision dans $\Re'$ en fonction de γ et E_0.

3. Ondes gravitationnelles

Questions préliminaires :
Soit la métrique de l'espace-temps de Minkowski :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{c} \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ \eta_{kk} = -1 \text{ avec } k = 1, 2, 3 \\ \eta_{00} = 1 \end{array} \right.$$

a- Déterminer les valeurs des différents symboles de Christoffel : $\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \dfrac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau} \right)$
b- Les géodésiques suivent les équations :

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

En déduire l'expression de ces équations dans cet espace-temps.

Ondes gravitationnelles
Les ondes gravitationnelles sont des perturbations de l'espace-temps créées par des objets massifs ayant des variations importantes de leur distribution de masse dans le référentiel de l'observateur. Ces perturbations se propagent à la vitesse c.
On étudie le cas d'une onde gravitationnelle plane qui se propage dans la direction $x^3 = z$. On pose : $x^0 = ct$; $x^1 = x$; $x^2 = y$. On suppose que la perturbation de l'espace-temps qu'elle induit peut se décrire sous la forme de la métrique :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \left(1 + a \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right)\ dx^2 - \left(1 - a \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right)\ dy^2 - dz^2$$

où ω représente la pulsation de l'onde et a son amplitude relative : $a \ll 1$ (l'ordre de grandeur des détections actuelles est : $a \approx 10^{-21}$).
c- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
d- Calculer le symbole de Christoffel $\Gamma^{\ 3}_{1\ 1}$.

Supposons que l'on cherche à détecter une onde gravitationnelle. Pour cela, on dispose de deux masses A et B libres dans l'espace-temps, proches l'une de l'autre et initialement au repos dans le référentiel de l'observateur.
Dans ce qui suit, la lettre entre parenthèse (A) ou (B) n'est pas un indice ou un exposant mais indique de quelle masse il s'agit. Lorsqu'aucune indication de ce type n'est donnée, cela signifie que la relation est valide pour les deux masses.
On suppose que les positions initiales des deux masses sont : $X^i_{(A)} = (0,0,0)$ et $X^i_{(B)} = \left(x_{(B)}, y_{(B)}, z_{(B)}\right)$.
En l'absence d'onde, la métrique de l'espace-temps est celle de Minkowski. Les coordonnées de ces deux masses vont suivre l'équation des géodésiques donnée ci-dessus en **(b)**. On choisit de poser : $cd\tau = ds$.
Lorsque l'onde arrive sur ces deux masses, leur position va varier avec une faible amplitude par rapport à la position initiale :

$$x^i_{(A)} = X^i_{(A)} + \delta x^i_{(A)} \qquad x^i_{(B)} = X^i_{(B)} + \delta x^i_{(B)}$$

e- L'amplitude relative des ondes gravitationnelles étant très petite devant 1, on peut poser que les quantités δx^i, $\dfrac{d\left(\delta x^\alpha\right)}{d\tau}$ et $\dfrac{d^2\left(\delta x^\alpha\right)}{d\tau^2}$ représentent le premier ordre de la perturbation due à l'onde et qu'il en est de même pour les symboles de Christoffel. Justifier qu'au premier ordre, en posant $cd\tau = ds$, l'équation des géodésiques peut s'écrire pour ces deux masses :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\delta x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^{\sigma}_{0\,0} = 0$$

f- Calculer le symbole de Christoffel $\Gamma^{\sigma}_{0\,0}$. En déduire que les deux masses ne changent pas de position au premier ordre lors du passage d'une onde gravitationnelle.
g- On suppose maintenant que les deux masses sont placées sur l'axe $Ox^1 = Ox$. On mesure de façon simultanée dans le référentiel de l'observateur (t est fixé), la pseudo-distance entre les deux masses lors du passage de l'onde :

$$L = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\left|g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\right|}$$

Calculer L. Commenter.

Jeudi 08 décembre 2016

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Echo laser sur une fusée

a- Dans $\Re'$ $\qquad \tau' = 2\,\dfrac{\ell'}{c}$

Dans $\Re$ $\qquad \tau = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}\tau' = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1} 2\dfrac{\ell'}{c}$

b- Dans $\Re$, la fusée s'est déplacée pendant le temps τ d'une distance $d = \beta c\tau = \beta c\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1} 2\dfrac{\ell'}{c} = \beta\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1} 2\ell'$

c- $\Delta t = \tau + \dfrac{d}{c} = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1} 2\dfrac{\ell'}{c} + \beta\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1} 2\dfrac{\ell'}{c}$

On a directement :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{2\ell'}{c}$$

d- On a : $(\Delta t)^2(1-\beta) = (1+\beta)\left(\dfrac{2\ell'}{c}\right)^2$

$$(\Delta t)^2 - \left(\frac{2\ell'}{c}\right)^2 = \beta\left[(\Delta t)^2 + \left(\frac{2\ell'}{c}\right)^2\right]$$

$$V = \beta c = c\frac{(\Delta t)^2 - \left(\dfrac{2\ell'}{c}\right)^2}{(\Delta t)^2 + \left(\dfrac{2\ell'}{c}\right)^2}$$

Application numérique : calculer β avec les données du problème.

$$\beta = \frac{(0.74\times10^{-6})^2 - \left(\dfrac{2\times100}{299792458}\right)^2}{(0.74\times10^{-6})^2 + \left(\dfrac{2\times100}{299792458}\right)^2} = 0.10$$

e- On observe sur Terre que l'onde réfléchie a une fréquence ν_r inférieure à la fréquence incidente ν_i. Quel est le phénomène à l'origine de ce décalage en fréquence ? Si l'on appelle ν_i' la fréquence du signal laser incident reçu par le miroir de la fusée dans $\Re'$, donner, sans démonstration, la relation entre ν_i', ν_i et β.

$$\nu_i' = \nu_i\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

f- On applique deux fois la relation précédente pour l'aller et le retour :

$$\nu_r = \nu_i\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

g- $V = \beta c = c\dfrac{\nu_i - \nu_r}{\nu_r + \nu_i}$
A.N. : $\beta = \dfrac{5.9 - 4.8}{5.9 + 4.8} = 0.10$
Le résultat obtenu est le même. La méthode la plus fiable est la mesure par effet Doppler car elle n'impose rien sur la configuration de la fusée par rapport à la Terre.

2. Annihilation

Dans le référentiel du laboratoire $\Re$, un positron e^+ d'énergie E_+ et de quantité de mouvement (impulsion observée) $\overrightarrow{p_+}$ entre en collision avec un électron e^- au repos (énergie $E_- = E_0$ et $\overrightarrow{p_-} = \overrightarrow{0}$) avec $E_0 = 0,5$ MeV énergie de masse identique pour le positron et l'électron. Les deux particules s'annihilent et produisent deux photons γ_1 et γ_2 d'énergies respectives E_1 et E_2 et de quantité de mouvement respectives $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$. Les quadrivecteurs impulsion-énergie sont notés $\widetilde{P_+}$ pour le positron, $\widetilde{P_-}$ pour l'électron et $\widetilde{P_1}$ et $\widetilde{P_2}$ pour les deux photons.
a- $\widetilde{P_+} + \widetilde{P_-} = \widetilde{P_1} + \widetilde{P_2}$
Ce qui est vrai pour chaque composante de ces quadrivecteurs :
$\overrightarrow{p_+} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$
$E_+ + E_0 = E_1 + E_2$
b- $\left(\widetilde{P_1}, \widetilde{P_1}\right) = \left(\widetilde{P_2}, \widetilde{P_2}\right) = 0 \Rightarrow E_1^2 - c^2p_1^2 = E_2^2 - c^2p_2^2 = 0$ car les photons n'ont pas de masse
$\left(\widetilde{P_+}, \widetilde{P_+}\right) = \left(\widetilde{P_-}, \widetilde{P_-}\right) = \left(\dfrac{E_0}{c}\right)^2 = \dfrac{E_+^2 - c^2p_+^2}{c^2} = \dfrac{E_-^2 - c^2p_-^2}{c^2}$
c-
$cp'_+ = \gamma\left(cp_+ - \beta E_+\right)$
$E'_+ = \gamma\left(E_+ - \beta cp_+\right)$
$cp'_- = \gamma\left(cp_- - \beta E_-\right) = -\gamma\beta E_0$
$E'_- = \gamma\left(E_- - \beta cp_-\right) = \gamma E_0$
d- On a dans le référentiel de centre de masse : $p'_+ + p'_- = 0$
$\gamma\left(cp_+ - \beta E_+\right) = \gamma\beta E_0$
$cp_+ = \beta(E_+ + E_0)$
$\beta = \dfrac{cp_+}{E_+ + E_0}$
$\overrightarrow{V} = \dfrac{\overrightarrow{p_+}\, c^2}{E_+ + E_0}$
Or on a : $c^2p_+^2 = E_+^2 - E_0^2$
$\beta = \dfrac{\sqrt{E_+^2 - E_0^2}}{E_+ + E_0} = \sqrt{\dfrac{E_+ - E_0}{E_+ + E_0}}$ et $\gamma = \sqrt{\dfrac{E_+ + E_0}{2E_0}}$
e- $E'_+ = E'_- = E'_1 = E'_2 = \gamma E_0$
en utilisant les formules de changement de référentiel et la conservation de l'énergie avant et après le choc. Ces résultats sont compatibles avec le fait que $\Re'$ est le référentiel de centre de masse.

3. Ondes gravitationnelles

Questions préliminaires :
a- $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\,\beta} = \dfrac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right) = 0$

b- $\dfrac{d^2x^\sigma}{ds^2}=0$

Ondes gravitationnelles

$$ds^2=c^2d\tau^2=c^2dt^2-\left(1+a\sin\left(\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\right)\,dx^2-\left(1-a\sin\left(\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\right)\,dy^2-dz^2$$

c- $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=0$

$g_{00}=\dfrac{1}{g^{00}}=1$

$g_{11}=\dfrac{1}{g^{11}}=-\left(1+a\sin\left(\omega\left(t-\dfrac{z}{c}\right)\right)\right)$

$g_{22}=\dfrac{1}{g^{22}}=-\left(1-a\sin\left(\omega\left(t-\dfrac{z}{c}\right)\right)\right)$

$g_{33}=\dfrac{1}{g^{33}}=-1$

d- $\Gamma^{3}_{1\,1}=\dfrac{1}{2}g^{33}\left(g_{31,1}+g_{31,1}-g_{11,3}\right)=+\dfrac{1}{2}a\dfrac{\omega}{c}\cos\left(\omega\left(t-\dfrac{z}{c}\right)\right)$

$$x^i=X^i_{(A)}+\delta x^i_{(A)}\qquad x^i_{(B)}=X^i_{(B)}+\delta x^i_{(B)}$$

e- δx^i, $\dfrac{d\delta x^\alpha}{d\tau}$ et $\dfrac{d^2\delta x^\alpha}{d\tau^2}$ représentent toutes le premier ordre. Justifier qu'au premier ordre, l'équation des géodésiques peut s'écrire pour ces deux masses :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2X^\sigma}{d\tau^2}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\delta x^\sigma}{d\tau^2}+\frac{1}{c^2}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\,\beta}\frac{d\left(X^\alpha+\delta x^\alpha\right)}{d\tau}\frac{d\left(X^\beta+\delta x^\beta\right)}{d\tau}=0$$

Or $\dfrac{d^2X^\sigma}{d\tau^2}=0$ et les termes en $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\,\beta}\dfrac{d\left(\delta x^\alpha\right)}{d\tau}$ sont du deuxième ordre ou plus.

Donc il reste : $\quad \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\delta x^\sigma}{d\tau^2}+\Gamma^{\sigma}_{0\,0}=0$

f- $\Gamma^{\sigma}_{0\,0}=\dfrac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau0,0}+g_{\tau0,0}-g_{00,\tau}\right)=0$

Donc $\dfrac{d^2\delta x^\sigma}{d\tau^2}=0$ Les deux masses sont au repos à l'origine donc $\dfrac{d\delta x^\sigma}{d\tau}=0$. Les deux masses ne changent pas de position.

g- $L=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{\left(1+a\sin\left(\omega\left(t-\dfrac{z}{c}\right)\right)\right)}\,dx=$

$\sqrt{\left(1+a\sin\left(\omega t\right)\right)}\,\left(x_{(B)}-x_{(A)}\right)\approx\left(x_{(B)}-x_{(A)}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}a\sin\left(\omega t\right)\right)$

Donc la distance varie alors que les positions restent les mêmes ! ! !