Master de Physique 1ère année

Jeudi 10 décembre 2015

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*

* Soit $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re}$ la vitesse d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.On suppose que cette vitesse est dans la direction Ox du repère $\Re$ dont le vecteur de base est $\overrightarrow{e_x}$.

On pose : $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re} = V_{\Re'/\Re}\overrightarrow{e_x}$

On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ; dy' = dy \,; dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors

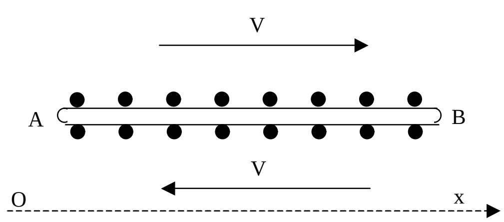
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$

* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}

1. Relativité sur tapis roulant

On considère un tapis roulant qui se déplace d'un point A à un point B, puis revient au point A. Des objets (par exemple des sièges), tous identiques sont fixés à intervalles réguliers sur le tapis roulant. On considère qu'aux extrémités les poulis ont un rayon infiniment fin et que le changement de sens du tapis se produit instantanément. En un mot, on ne se préoccupera pas de ce qui se passe aux extrémités du tapis.



Le tapis se déplace à vitesse constante de module V. On définit trois référentiel :

- celui lié au sol, fixe par rapport à un observateur O, appelé $\Re_0$. Dans ce référentiel, l'observateur définit l'axe Ox comme sur le schéma.
- celui lié à la partie du tapis roulant qui se déplace dans le sens des x positifs : $\Re_+$
- celui lié à la partie du tapis roulant qui se déplace dans le sens des x négatifs : $\Re_-$

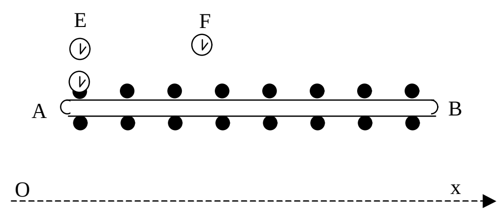
a- Exprimer $\beta_{\Re_+/\Re_0}$ et $\beta_{\Re_-/\Re_0}$ en fonction de V et c , puis de β.

b- Démontrer que $V_{\Re_+/\Re_-}$ s'écrit en fonction de $V_{\Re_+/\Re_0}$ et $V_{\Re_-/\Re_0}$ de la manière suivante :

$$V_{\Re_+/\Re_-} = \frac{V_{\Re_+/\Re_0} - V_{\Re_-/\Re_0}}{1 - \dfrac{V_{\Re_+/\Re_0} V_{\Re_-/\Re_0}}{c^2}}$$

En déduire l'expression $\beta_{\Re_+/\Re_-}$ en fonction de $\beta_{\Re_+/\Re_0}$ et $\beta_{\Re_-/\Re_0}$, puis de β.

c$_1$- L'observateur dispose de deux horloges synchronisées au repos dans $\Re_0$ situées aux points E et F. Une troisième horloge est placée sur un des sièges du tapis roulant.



Pendant que le tapis avance, l'horloge sur le siège coïncide tour à tour avec le point E, puis le point F. Elle mesure un intervalle de temps $\Delta\tau$. Lorsque l'horloge sur le siège coïncide avec E, l'horloge fixée en E marque un temps t_E ; lorsque l'horloge sur le siège coïncide avec F, l'horloge fixée en F marque un temps t_F. On note : $\Delta t_{EF} = t_F - t_E$.
Déterminer $\Delta\tau_{EF}$ en fonction de Δt_{EF} et des données du problème.

c$_2$- Supposons que l'horloge sur le siège fasse un tour complet : en partant de E, elle revient à E. Déterminer l'intervalle de temps $\Delta\tau'$ qu'elle mesure en fonction de γ et de $\Delta t'$ intervalle de temps mesuré par l'horloge située en E ; puis en fonction de γ, β, c et de la distance d entre A et B mesurée dans $\Re_0$.

d- On appelle $\Delta\lambda$ la distance entre deux sièges fixes dans $\Re_+$ telle que peut la mesurer un passager assis sur un siège fixe dans $\Re_+$. La distance correspondante dans $\Re_0$ est alors appelée $\Delta\ell$. Déterminer la relation entre $\Delta\lambda$ et $\Delta\ell$.
Question bonus : Décrire un protocole expérimental qui permette de mesurer ces deux distances et de vérifier cette relation.

e- Supposons à présent qu'un passager assis sur un siège fixe dans $\Re_-$ veuille mesurer la distance entre les deux sièges précédents (fixes $\Re_+$). La distance obtenue est appelée $\Delta\lambda'$. Déterminer $\Delta\lambda'$ en fonction de $\Delta\lambda$ et $\beta_{\Re_+/\Re_-}$; puis en fonction de $\Delta\ell$, β et γ.

f- On suppose que l'observateur en $\Re_0$ compte un nombre total $n = \dfrac{2d}{\Delta\ell}$ de sièges régulièrement espacés sur le tapis roulant. Un passager assis sur un siège fixe dans $\Re_+$ décide de compter lui-aussi le nombre total de sièges du tapis. Déterminer le nombre de sièges situés pour lui dans la partie fixe dans $\Re_+$ du tapis roulant. Même question pour le nombre de sièges qu'il compte pour la partie du tapis roulant fixe dans $\Re_-$. Le nombre total de sièges est-il conservé ?

2. Détection des neutrinos par effet Čerenkov (prix Nobel 2015)

P.A. Čerenkov , "Visible emission of clean liquids by action of radiation", Doklady Akad. Nauk SSSR 2 (1934) 451. Reprinted in Selected Papers of Soviet Physicists, Usp. Fiz. Naut. 93 (1967) 385. Čerenkov a eu le prix Nobel de physique en 1958 pour son explication de cet effet.
Le prix Nobel de physique en 2015 a été attribué à Takaaki Kajita et Arthur B. McDonald pour leur étude mettant en évidence l'existence d'une masse pour les neutrinos. Cette étude s'est fondée sur la détection de ces particules par d'immenses réservoirs d'eau enterrés afin d'être protégés du rayonnement cosmique, de manière à ce que seuls les neutrinos parviennent jusqu'au réservoir. Lorsque les neutrinos effectuent une collision avec les constituants des molécules d'eau, une particule est créée avec une vitesse très proche de la vitesse de la lumière. Si la particule créée a une vitesse suffisante, il y a alors un phénomène d'émission de lumière appelé effet Čerenkov. Le principe du détecteur de neutrinos consiste à détecter cet effet Čerenkov avec des photomultiplicateurs placés tout autour du réservoir d'eau.
On propose dans cet exercice une explication de l'effet Čerenkov comme collisions de particules relativistes. Dans un milieu matériel, on peut rendre compte de l'interaction entre un photon et le milieu matériel en attribuant au photon une énergie $\mathcal{E}_\varphi$ et un vecteur impulsion $\overrightarrow{p_\varphi} = p_\varphi \overrightarrow{u}$ avec $\mathcal{E}_\varphi = \hbar\omega$ et $\|\overrightarrow{p_\varphi}\| = p_\varphi = \dfrac{n\mathcal{E}_\varphi}{c}$, n étant l'indice caractéristique du milieu et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire. (On remarquera que, même si le photon possède une masse nulle, la pseudo-norme de sa quadri-impulsion est non-nulle lors de la propagation dans un milieu matériel à cause des interactions avec le milieu).

On considère, dans ce milieu, l'émission d'un photon par une particule en mouvement rectiligne et uniforme. On note m la masse de la particule, E_i son énergie initiale et $\overrightarrow{v_i}$ sa vitesse initiale par rapport au repère $\Re$ du laboratoire, supposé minkowskien et dans lequel le milieu matériel est au repos. On appelle θ l'angle d'éjection du photon dans ce repère par rapport à la vitesse initiale $\overrightarrow{v_i}$; E_f l'énergie finale de la particule de masse m et $\overrightarrow{v_f}$ sa vitesse finale dans $\Re$.On appelle $\overrightarrow{p_i}$ le vecteur impulsion associé à la particule avant l'émission du photon ($\|\overrightarrow{p_i}\| = p_i$) et $\overrightarrow{p_f}$ le vecteur impulsion associé à la particule avant l'émission du photon ($\|\overrightarrow{p_f}\| = p_f$). On pose : $\|\overrightarrow{v_f}\| = v_f, \qquad \|\overrightarrow{v_i}\| = v_i$
a- Donner la relation entre $\overrightarrow{p_i}$, m et $\overrightarrow{v_i}$. De même, donner la relation entre $\overrightarrow{p_f}$, m et $\overrightarrow{v_f}$.
b- Donner la relation entre E_i, m, c et $\overrightarrow{v_i}$; puis celle entre E_i, m, c et $\overrightarrow{p_i}$.
c- Exprimer les coordonnées dans $\Re$ du quadrivecteur énergie-impulsion du photon : $\widetilde{P_\varphi}$ et celles des quadrivecteurs énergie-impulsion $\widetilde{P_i}$ et $\widetilde{P_f}$, respectivement initial et final, de la particule m.
d- Ecrire les équations de conservation associées à ces quantités.
e- Déduire de la question précédente (en particulier d'une équation sur l'énergie), la relation :
$p_f^2 = p_i^2 - 2\dfrac{E_i}{c^2}\hbar\omega + \dfrac{p_\varphi^2}{n^2}$
f- Utiliser les résultats précédents (en particulier d'une équation sur les vecteurs impulsion) pour obtenir $\cos\theta$ en fonction de p_i, p_φ, E_i, n, c, $\hbar$ et ω.
Montrer que l'on peut écrire :

$$\cos\theta = \frac{c}{nv_i}\left(1 + \frac{\hbar\omega}{2E_i}(n^2 - 1)\right)$$

g- A partir des résultats obtenus, donner une condition nécessaire sur la vitesse initiale pour que l'effet Čerenkov puisse avoir lieu.
h- Déterminer la pulsation maximale $\omega_{\max}$ que peut avoir le photon émis en fonction des données de $E_i, v_{i,} \hbar, c$ et n.Dans quelle direction est-il alors émis ?
i- Exprimer l'angle maximal d'émission $\theta_{\max}$ des photons en fonction de la vitesse v_i , c et n.

3. Vitesse à l'horizon d'un trou noir

On suppose que l'effet du champ gravitationnel d'un trou noir peut être représenté par une métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

où G est la constante de gravitation et M la masse du trou noir.
a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

b- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^1 = ct$. Montrer que que l'équation de la géodésique s'écrit sous la forme :

$$Ac\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dA}{ds}\frac{cdt}{ds} = 0$$

A étant une quantité que l'on déterminera en fonction de G, M r et c.
c- En déduire que l'on a :

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{cdt}{ds} = Q \qquad \text{avec} \qquad Q \text{ constante}$$

Soit une particule au repos à l'infini qui tombe de façon radiale sur le trou noir. On a alors :
- $d\theta = d\varphi = 0$
- $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{cdt}{ds} = 1$

d- Donner des arguments justifiant la deuxième égalité.
e- A partir des deux conditions données ci-dessus et de l'expression de la métrique, exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de G, M r et c.
f- On rappelle que l'horizon d'un trou noir correspond au rayon $r_h = \frac{2GM}{c^2}$. Que devient la vitesse observée de la particule quand elle approche de l'horizon ? Commenter.

Master de Physique 1ère année

Jeudi 10 décembre 2015

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Relativité sur tapis roulant

a- $\left|\beta_{\Re_+/\Re_0}\right| = \left|\beta_{\Re_-/\Re_0}\right| = |\beta| = \left|\dfrac{V}{c}\right|$

b- $\beta_{\Re_+/\Re_-} = \dfrac{\left(\beta_{\Re_+/\Re_0} - \beta_{\Re_-/\Re_0}\right)}{\left(1 - \beta_{\Re_+/\Re_0}\beta_{\Re_-/\Re_0}\right)} = \dfrac{2\beta}{\left(1+\beta^2\right)}$

c$_1$- $\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\Delta t$

c$_2$- $\Delta\tau = \dfrac{2d}{\gamma\beta c}$

d- $\Delta\lambda = \gamma\Delta\ell$

Pour mesurer ces distances dans des référentiels différents, on peut mettre en oeuvre dans $\Re_+$ un tir laser entre un siège et l'autre, l'aller-retour étant assuré par un miroir sur un siège. Dans $\Re_0$, deux observateurs avec deux horloges synchronisées peuvent se placer simultanément aux emplacements de deux sièges consécutifs et mesurer leur distance par tir laser.

e- $\Delta\lambda' = \sqrt{1-\beta^2_{\Re_+/\Re_-}}\Delta\lambda = \gamma\Delta\ell\sqrt{1-\left(\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2_-}$

$$= \frac{\Delta\ell}{1+\beta^2}\frac{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta\ell}{\gamma\left(1+\beta^2\right)}$$

f- Le passager compte pour $\Re_+$ un nombre de sièges qui est :

$$n_{\Re_+} = \frac{d}{\gamma\Delta\lambda} = \frac{d}{\Delta\ell}\left(1-\beta^2\right)$$

Le passager compte pour $\Re_-$ un nombre de sièges qui est :

$$n_{\Re_-} = \frac{d}{\gamma\Delta\lambda'} = \frac{d}{\Delta\ell}\left(1+\beta^2\right)$$

Il voit plus de sièges dans la partie mobile par rapport à lui que dans la partie immobile.
On a bien : $n = n_{\Re_+} + n_{\Re_-}$ce qui est rassurant !

2. Détection des neutrinos par effet Čerenkov (prix Nobel 2015)

a- $\overrightarrow{p_i} = \gamma_i m\overrightarrow{v_i}$ avec $\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_i}{c}\right)^2}}$

$\overrightarrow{p_f} = \gamma_f m \overrightarrow{v_f}$ avec $\gamma_f = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_f}{c}\right)^2}}$

b- $E_i = \gamma_i mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_i}{c}\right)^2}} = \sqrt{m^2c^4 + p_i^2c^2}$

c- $\widetilde{P_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_i}{c} \\ \overrightarrow{p_i} \end{pmatrix}$, $\widetilde{P_f} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_f}{c} \\ \overrightarrow{p_f} \end{pmatrix}$, $\widetilde{P_\varphi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar\omega}{c} \\ \dfrac{\hbar\omega}{c} n \overrightarrow{u} \end{pmatrix}$

d- $\widetilde{P_i} = \widetilde{P_f} + \widetilde{P_\varphi}$

On a donc conservation de la pseudo-norme et des composantes.

$\dfrac{E_i}{c} = \dfrac{E_f}{c} + \dfrac{\hbar\omega}{c}$

$\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f} + \dfrac{\hbar\omega}{c} n \overrightarrow{u}$

e- $\dfrac{E_i}{c} = \dfrac{E_f}{c} + \dfrac{\hbar\omega}{c} \Rightarrow \sqrt{m^2c^4 + p_i^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + p_f^2c^2} + \hbar\omega$

$m^2c^4 + p_f^2c^2 = m^2c^4 + p_i^2c^2 + (\hbar\omega)^2 - 2E_i\hbar\omega$

$p_f^2c^2 = p_i^2c^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{n^2}c^2 - 2E_i\hbar\omega$

$p_f^2 = p_i^2 - 2\dfrac{E_i}{c^2}\hbar\omega + \dfrac{p_\varphi^2}{n^2}$

f- $\overrightarrow{p_f} = \overrightarrow{p_i} - \overrightarrow{p_\varphi}$

$p_f^2 = p_i^2 + p_\varphi^2 - 2p_ip_\varphi\cos\theta$

En combinant avec l'équation de la question précédente pour éliminer p_f^2, on obtient :

$\cos\theta = \dfrac{1}{2p_ip_\varphi}\left[p_i^2 + p_\varphi^2 - p_i^2 + 2\dfrac{E_i}{c^2}\hbar\omega - \dfrac{p_\varphi^2}{n^2}\right]$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2p_ip_\varphi}\left[p_\varphi^2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) + 2\dfrac{E_i}{c^2}\hbar\omega\right]$

$\cos\theta = \dfrac{E_i\hbar\omega}{c^2p_ip_\varphi}\left[\dfrac{c^2p_\varphi^2}{2n^2E_i\hbar\omega}(n^2-1) + 1\right]$

$\cos\theta = \dfrac{c\gamma_i mc^2\hbar\omega}{c^2\gamma_i mv_i n\hbar\omega}\left[\dfrac{c^2n^2(\hbar\omega)^2}{2n^2E_i\hbar\omega}(n^2-1) + 1\right]$

$\cos\theta = \dfrac{c}{nv_i}\left(1 + \dfrac{\hbar\omega}{2E_i}(n^2-1)\right)$

g- Une des conditions est que le $\cos\theta$ existe, c'est-à-dire qu'il soit compris entre -1 et 1. Cela signifie notamment que, la parenthèse étant évidemment supérieure à 1, $\dfrac{c}{nv_i} \leq 1$ soit $\dfrac{c}{n} \leq v_i$

h- On a : $\cos\theta = \dfrac{c}{nv_i}\left(1 + \dfrac{\hbar\omega}{2E_i}(n^2-1)\right)$

$\omega_{\max}$ correspond au cas où : $\cos\theta = 1$

La direction est alors : $\theta = 0$

On a donc : $1 = \dfrac{c}{nv_i}\left(1 + \dfrac{\hbar\omega_{\max}}{2E_i}(n^2-1)\right)$

$\omega_{\max} = E_i \hbar^{-1} \frac{2}{n^2-1}\left(\frac{nc}{v_i} - 1\right)$
i- $\theta_{\max}$ correspond au cas où le photon à une fréquence asymptotiquement nulle.
$\cos\theta = \frac{c}{nv_i}$

3. Vitesse à l'horizon d'un trou noir

a- $g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$
$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$
$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2$
$g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -r^2 \sin^2\theta$
Les autres termes de la métrique sont nuls.
b- *Equation en* $x^0 = ct$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^{\,0}_{\alpha\,\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont :

$$\Gamma^{\,0}_{0\,1} = \Gamma^{\,0}_{1\,0} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{01,0} + g_{00,1} - g_{10,0}\right) = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,1}$$
$$\Gamma^{\,0}_{0\,1} = \Gamma^{\,0}_{1\,0} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}\frac{d\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}{dr} = \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{dA}{dr}$$

avec $A = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$
L'équation de géodésique devient :

$$c\frac{d^2t}{ds^2} + c\frac{1}{A}\frac{dA}{dr}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 = A\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dA}{ds}\frac{dt}{ds}$$

c- $\frac{d}{ds}\left(\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{dt}{ds}\right) = 0$
$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{dt}{ds} = Q \qquad \text{avec} \qquad Q \text{ constante}$
On obtient ainsi une intégrale première du mouvement.
d- A l'infini, la particule est au repos, elle ne subit aucune interaction, elle est donc dans son référentiel propre dans une métrique minkowskienne.
$1 - \frac{2GM}{rc^2} \approx 1$ et $\frac{cdt}{ds} \approx 1$
e- $\frac{dr}{dt}$ en fonction de G, M r et c.

$$\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 c^2dt^2 = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2$$
$$\frac{2GM}{rc^2}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 c^2dt^2 = dr^2$$
$$\frac{dr}{dt} = c\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}$$

f- La vitesse s'annule. Pour un observateur extérieur, la particule n'atteint jamais le trou noir. (Dans le référentiel de l'horizon, elle l'atteint avec la vitesse de la lumière...)