Master de Physique 1ère année/CPES PSL

Jeudi 11 décembre 2014

Examen de Relativité et Temps

Durée 2h - Calculatrice autorisée, documents interdits.

Remarques préliminaires

* *Lors de la correction, une attention toute particulière sera donnée à la rédaction. Une réponse ne pourra être comptée juste que si les hypothèses sont clairement énoncées, les notations bien définies et les calculs intermédiaires explicités.*
* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, ...$ tandis que les vecteurs classiques à trois composantes seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, ...$
De même, on utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.
* Soit $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re}$ la vitesse d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.
On suppose que : $\overrightarrow{V}_{\Re'/\Re} = V_{\Re'/\Re}\, \overrightarrow{e_x}$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vecteur de base de l'axe Ox.
On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.
On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re} dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re} cdt\right) \end{cases} \quad ;\ dy' = dy\,;\ dz' = dz$$

* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}
Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C

1. Trou de ver

Il est possible de décrire, dans un système de coordonnées particulier, la métrique associée à *un trou de ver* sous cette forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \ dr^2 - \left(b^2 + r^2\right) d\theta^2 - \left(b^2 + r^2\right) \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

où b est une constante strictement positive. Contrairement aux coordonnées sphériques usuelles, le système de coordonnées est tel que r peut prendre des valeurs négatives. On a alors :

$$t \in \mathbb{R}, \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad \theta \in [0;\pi]\,, \qquad \varphi \in [0; 2\pi[$$

a- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
b- Que devient la métrique si $r \to +\infty$ ou si $r \to -\infty$?
c- Que devient l'équation de la métrique pour la lumière ? En déduire l'équation d'une géodésique lumière radiale, c'est-à-dire l'équation suivie par la lumière avec θ et φ constants. Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\,\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

d- Calculer les différents symboles de Christoffel $\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\beta}$ lorsque $\sigma = 0$ et $\sigma = 1$. On déterminera sur des arguments simples quels sont les symboles nuls.
e- Déterminer l'équation de la géodésique en $x^1 = r$. Que devient-elle dans le cas d'un mouvement radial ?

2. Production d'un deuton par une collision proton-proton

Il est possible de produire un deuton d en réalisant une collision entre deux protons p . Cette réaction produit aussi un pion π^+.

$$p + p \to d + \pi^+$$

On donne les énergies de masse des particules : $m_pc^2 = 938,3$ MeV $\qquad m_dc^2 = 1875,6$ MeV $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV
a- Quelles sont les quantités physiques conservées au cours de la collision quel que soit le référentiel considéré ?
b- Quelles sont les propriétés du référentiel $\Re$ de centre de masse des deux protons.
c- Dans $\Re$, déterminer l'énergie de seuil E_s de la réaction.
d- On suppose que la réaction se produit dans le référentiel $\Re'$ du laboratoire où un des deux protons initiaux, appelé proton-cible, est au repos. Déterminer l'énergie cinétique minimale T_m à donner au proton incident pour que la réaction puisse avoir lieu. On définira soigneusement toutes les notations utilisées.

3. Zeta Reticuli

Suite au succès magistral de son spectacle-conférence sur les voyages interstellaires, Alexandre A.[1] décide d'aller expérimenter directement ce que lui ont raconté les spécialistes en relativité lors de la préparation de son spectacle, en effectuant un aller-retour vers l'étoile Zeta Reticuli. L'étoile est située à $39,5$ années-lumière (1 al $= 9,5 \times 10^{15}$ m) du Soleil et de la Terre. Alexandre A. utilise un engin lui permettant d'aller à une vitesse v par rapport au référentiel Minkowskien du Système Solaire telle que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 40$ avec $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Voyage à vitesse constante
a- Calculer la valeur de β.
b- On suppose que l'engin démarre et freine de manière instantanée ; de même, il effectue un demi-tour instantané au niveau de l'étoile. Déterminer le temps du voyage aller-retour dans le référentiel du Système Solaire, puis dans le référentiel de l'engin spatial. Alexandre A. sera-t-il raccord pour finir sa série arthurienne (dont il est l'acteur principal) à son retour ?
c- Quelle est l'énergie cinétique E_c acquise au démarrage de l'engin ?
Application numérique : l'engin a une masse $m = 1000$ tonnes. Déterminer la quantité d'énergie nécessaire pour initier le mouvement.

[1] Acteur, compositeur, réalisateur, monteur, scénariste, humoriste et écrivain français célèbre pour sa série TV portant sur les légendes arthuriennes.

d- La production mondiale d'énergie est estimée à 8 Gtep $= 8 \times 10^9$ tep (une tonne équivalent pétrole = 1 tep = 42 GJ). Combien d'années faut-il pour produire l'énergie nécessaire à ce voyage avec les moyens actuels ? Commenter.
e- Une autre façon de produire cette énergie consisterait à produire des antiprotons $\overline{p}$ et à les faire s'annihiler par collision avec des protons p ce qui produit n photons :

$$p + \overline{p} \rightarrow n\ h\nu$$

L'énergie de masse d'un antiproton est identique à celle d'un proton : $m_p c^2 = 938,3$ MeV. Déterminer la masse totale M d'antimatière nécessaire à un tel voyage et la comparer à la masse de l'engin.
f- Des expériences au CERN ont montré que l'énergie minimale nécessaire pour produire une collision aboutissant à la création d'un antiproton est égale à 26 fois l'énergie de masse de ce dernier. Par ailleurs, une collision à cette énergie n'aboutit à la création d'un antiproton qu'une fois sur un million. Déterminer la quantité d'énergie nécessaire pour produire l'antimatière déterminée en question **(e).** Conclure.

Voyage accéléré
g- Ayant résolu les problèmes énergétiques, Alexandre A. choisit, pour des questions de confort, de faire un voyage uniformément accéléré avec une accélération $g = 10$ m.s^{-2} identique à la gravité terrestre (plutôt que de subir, par exemple, une énorme accélération en tout début du voyage, à laquelle il ne survivrait pas). On ne s'intéresse, pour commencer, qu'au voyage aller vers Zeta Reticuli. On suppose que l'engin suit une trajectoire rectiligne suivant l'axe Ox.
Dans le référentiel $\Re_*$ comobile avec l'engin, les coordonnées de la quadri-accélération $\widetilde{a}$ sont alors :

$$a_*^{ct} = 0 \qquad a_*^x = g \qquad a_*^y = 0 \qquad a_*^z = 0$$

On suppose qu'entre l'instant t_* et $t_* + dt_*$, ce référentiel peut être considéré comme Minkowskien, car l'engin a une vitesse constante : $v = \beta c$ par rapport au Système Solaire.
Déterminer alors les coordonnées de la quadri-accélération a^{ct} a^x a^y et a^z dans le référentiel $\Re$ du Système Solaire.
h- Rappeler la relation entre la quadri-accélération $\widetilde{a}$ et la quadri-vitesse $\widetilde{u}$. On appellera τ le temps propre associé à l'engin.
i-On rappelle que les quatre coordonnées de la quadri-vitesse de l'engin dans le référentiel $\Re$ sont :

$$u^{ct} = \gamma c \qquad u^x = \gamma\beta c \qquad u^y = 0 \qquad u^z = 0$$

Montrer que les coordonnées non-nulles satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{du^{ct}}{d\tau} = \alpha\ u^x \qquad \frac{du^x}{d\tau} = \alpha\ u^{ct}$$

Déterminer α en fonction de g et de c.
j- On démontre que les solutions de ces équations aboutissent à une équation de la trajectoire dans $\Re$ de la forme :

$$x(\tau) = x_0 + \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right] = x_0 + \frac{c^2}{g}\left[\frac{\exp\left(\frac{g}{c}\tau\right) + \exp\left(-\frac{g}{c}\tau\right)}{2} - 1\right]$$

$$\text{et} \qquad x(t) = x_0 + \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2} - 1\right]$$

Pour effectuer un voyage confortable, l'engin doit accélérer sur la moitié du chemin aller, puis freiner de la même quantité sur la deuxième moitié du chemin. Au retour, les accélération et freinage se produisent de la même façon. Au total, le temps de parcours dans un référentiel est 4 fois le temps nécessaire pour parcourir avec une accélération constante la moitié du trajet entre la Terre et l'étoile.
Si $x(t) = x_{1/2}$ représente la position à mi-parcours du chemin vers Zeta Reticuli et $x_0 = 0$ celle du Système Solaire, déterminer le temps de voyage total (aller-retour) dans le référentiel de l'engin (temps propre) et dans le référentiel de la Terre. Comparer les résultats à ceux obtenus en question **(b)**. Commenter.

Master de Physique 1ère année/CPES PSL

Jeudi 11 décembre 2014

Corrigé de l'examen de Relativité et Temps

1. Trou de ver

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - (b^2 + r^2)\, d\theta^2 - (b^2 + r^2) \sin^2\theta \, d\varphi^2$$
$$t \in \mathbb{R}, \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad \theta \in [0; \pi]\,, \qquad \varphi \in [0; 2\pi[$$

a- $g_{00} = \dfrac{1}{g^{00}} = 1$

$g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}} = -1$

$g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}} = -\left(b^2 + r^2\right)$

$g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}} = -\left(b^2 + r^2\right)\sin^2\theta$

$g_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{g^{\alpha\beta}} = 0$ si $\alpha \neq \beta$

b- Si $r \to +\infty$ ou si $r \to -\infty$, b^2 devient négligeable par rapport à r^2. La métrique tend alors vers celle d'un espace plat.

c- Pour un photon, on a : $c^2dt^2 - dr^2 - (b^2 + r^2)\, d\theta^2 - (b^2 + r^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 = 0$

Pour $d\theta = d\varphi = 0$, l'équation devient : $c^2dt^2 = dr^2$

Soit : $\dfrac{dr}{dt} = \pm c \qquad$ soit $r = \pm ct$

Les géodésiques vont suivre les équations :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$$

d- $\Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\beta} = \dfrac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right)$

Quels que soient α ou β, on a : $\Gamma^{0}_{\ \alpha\beta} = \dfrac{1}{2}g^{00}\left(g_{0\alpha,\beta} + g_{0\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}\right) = 0$ car aucun élément de la métrique ne dépend du temps et g_{00} est une constante.

$\Gamma^{1}_{\ \alpha\beta} = \dfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{1\alpha,\beta} + g_{1\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,1}\right)$

g_{11} est une constante, les $g_{1\beta,\alpha}$ et $g_{1\alpha,\beta}$ sont tous nuls. Par ailleurs, $g_{00,1} = g_{11,1} = 0$ .Les symboles de Christoffel non-nuls sont donc :

$\Gamma^{1}_{\ 22} = \dfrac{1}{2}g^{11}\left(-g_{22,1}\right) = \dfrac{1}{2}(-1)(2r) = -r$

$\Gamma^{1}_{\ 33} = \dfrac{1}{2}g^{11}\left(-g_{33,1}\right) = \dfrac{1}{2}(-1)2r\sin^2\theta = -r\sin^2\theta$

e- $\dfrac{d^2x^1}{ds^2} + \ \Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds} = 0$
$\dfrac{d^2x^1}{ds^2} + \ \Gamma^{1}_{\ \alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds} = \dfrac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^{1}_{\ 22}\dfrac{dx^2}{ds}\dfrac{dx^2}{ds} + \Gamma^{1}_{\ 33}\dfrac{dx^3}{ds}\dfrac{dx^3}{ds} = 0$
$\dfrac{d^2r}{ds^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$
Si $d\theta = d\varphi = 0$, l'équation devient : $\dfrac{d^2r}{ds^2} = 0$
Les géodésiques radiales sont telles que $\dfrac{dr}{ds}$ = constante. Elles sont parcourues à une vitesse constante.

2. Production d'un deuton par une collision proton-proton

$$p + p \rightarrow d + \pi^+$$

$m_pc^2 = 938,3$ MeV $\qquad m_dc^2 = 1875,6$ MeV $\qquad m_\pi c^2 = 139,6$ MeV
a- Au cours de la collision, il y a conservation du quadrivecteur impulsion-énergie. Sa norme est donc conservée, ainsi que ses composantes : l'énergie et le vecteur impulsion sont conservés.
b- Dans référentiel $\Re$ de centre de masse des deux protons, l'impulsion totale est nulle.
c- $E_s = m_dc^2 + m_\pi c^2 = 1875,6 + 139,6 = 2015,2$ MeV
Energie cinétique minimale : $T_s = m_dc^2 + m_\pi c^2 - 2 \times m_pc^2 = 1875,6 + 139,6 - 2 \times 938,3 =$ 138, 6 MeV
d-Dans $\Re$, l'énergie totale du système des deux protons est : $E = E_s$
L'énergie totale du système dans $\Re'$ s'écrit : $E' = 2m_pc^2 + T_m$
La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion ne dépend pas du référentiel choisi. Comme, par définition, l'impulsion totale du système est nulle dans $\Re_I$, on a :

$$\left(\frac{2m_pc^2 + T_m}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\frac{E_s}{c}\right)^2$$

avec q norme de l'impulsion du proton dans $\Re'$.
En développant cette relation, on obtient :

$$\left(\frac{2m_pc^2}{c}\right)^2 + 4\frac{m_pc^2T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\frac{E_s}{c}\right)^2$$

Or, d'après la pseudo-norme de la quadri-impulsion du deuxième proton on a :

$$q^2 = 2\frac{m_pc^2T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{2m_pc^2}{c}\right)^2 + 2\frac{m_pc^2T_m}{c^2} = \left(\frac{E_s}{c}\right)^2$$

Cela signifie donc que, dans le référentiel $\Re'$, l'énergie cinétique minimale nécessaire pour obtenir la réaction vaut :

$$T_m = \frac{E_s^2 - (2m_p c^2)^2}{2m_p c^2} = \frac{2015,2^2 - 4 \times 938,3^2}{2 \times 938,3} = 287,\ 4 \text{ MeV}$$

Version avec l'énergie cinétique minimale :
Dans $\Re$, l'énergie totale du système des deux protons est : $E = 2m_p c^2 + T_s$
L'énergie totale du système dans $\Re'$ s'écrit : $E' = 2m_p c^2 + T_m$
La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion ne dépend pas du référentiel choisi. Comme, par définition, l'impulsion totale du système est nulle dans $\Re_I$, on a :

$$\left(\frac{2m_p c^2 + T_m}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\frac{2m_p c^2 + T_s}{c}\right)^2$$

avec q norme de l'impulsion du proton dans $\Re'$.
En développant cette relation, on obtient :

$$4\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2 - q^2 = 4\frac{m_p c^2 T_s}{c^2} + \left(\frac{T_s}{c}\right)^2$$

Or, d'après la pseudo-norme de la quadri-impulsion du deuxième proton on a :

$$q^2 = 2\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} + \left(\frac{T_m}{c}\right)^2$$

On en déduit que :

$$2\frac{m_p c^2 T_m}{c^2} = 4\frac{m_p c^2 T_s}{c^2} + \left(\frac{T_s}{c}\right)^2$$

Cela signifie donc que, dans le référentiel $\Re'$, l'énergie cinétique minimale nécessaire pour obtenir la réaction vaut :

$$T_m = 2T_s + \frac{T_s^2}{2m_p c^2} = 2 \times 138,6 + \frac{138,6^2}{2 \times 938,3} = 287,\ 4 \text{ MeV}$$

3. Zeta Reticuli

L'étoile est située à $39,5$ années-lumière (1 al $=\ 9,5 \times 10^{15}$ m) du Soleil et de la Terre.
Voyage à vitesse constante
a- $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 40$
$\beta^2 = 1 - \gamma^{-2}$
$\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = \sqrt{1-40^{-2}} = 0.999\,687\,5$
b- Le voyage dans le référentiel de la Terre s'effectue en : $2 \times 39,5/0,999\,687\,5 = 79$ ans.
Dans le référentiel de l'engin, le voyage s'effectue en : $79/40 = 1,\ 975$ ans
L'acteur sera raccord pour continuer sa série arthurienne puisqu'il n'aura vieilli que de deux ans, mais les fans de la première heure auront vieilli de 79 ans, le coup est dur pour eux !

c- $E_c = (\gamma - 1)\, mc^2$
A.N. : $E_c = (40-1) \times 10^6 \times 299\ 792\ 458^2 = 3,5 \times 10^{24}$ J
d- La production mondiale d'énergie est estimée à 8 Gtep $= 8 \times 10^9$ tep (une tonne équavalent pétrole = 1 tep = 42 GJ).
$E_c = 3,5 \times 10^{24}/42/10^9 = 8,3 \times 10^{13}$ tep. Il faut donc : $8,3 \times 10^{13}/8/10^9 = 10375$ ans pour produire l'énergie nécessaire pour un tel voyage avec les moyens de production actuel. Ce n'est pas réalisable.
e- La masse totale d'antimatière nécessaire à un tel voyage est donc :
$M = E_c/c^2/2 = (\gamma - 1)\, m/2 = 39 \times 500000 = 1,95 \times 10^7$ kg soit $19,5$ fois la masse de l'engin spatial.
f- Pour produire l'antimatière nécessaire à ce voyage, il faut donc produire 26 millions de fois l'énergie cinétique déterminée en question **(c)**.
A.N. : $E_{tot} = 26 \times 10^6 \times 3,5 \times 10^{24} = 9,1 \times 10^{31}$ J
Le problème de la production d'une telle quantité d'énergie est encore plus aigu que dans le cas précédent !

Voyage accéléré
g- Dans le référentiel $\Re_*$ comobile avec l'engin, les coordonnées de la quadri-accélération sont alors :

$$a_*^{ct} = 0 \qquad a_*^x = g \qquad a_*^y = 0 \qquad a_*^z = 0$$

Les coordonnées de la quadri-accélération suivent les transformations de Lorentz lors d'un changement de référentiel :
$a^{ct} = \gamma \beta g \qquad a^x = \gamma g \qquad a^y = a_*^y = 0 \qquad a^z = a_*^z = 0$
h- $\dfrac{d\widetilde{u}}{d\tau} = \widetilde{a}$
i-On rappelle que les quatre coordonnées de la quadri-vitesse de l'engin dans le référentiel $\Re$ sont :

$$u^{ct} = \gamma c \qquad u^x = \gamma \beta c \qquad u^y = 0 \qquad u^z = 0$$

$\dfrac{du^{ct}}{d\tau} = \dfrac{g}{c}\, u^x \qquad \dfrac{du^x}{d\tau} = \dfrac{g}{c}\, u^{ct}$
j- Dans le référentiel de la Terre, l'engin parcourt la moitié du trajet en un temps :
$x_{1/2} = \dfrac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \dfrac{g^2}{c^2} t_{1/2}^2} - 1\right]$
$\dfrac{x_{1/2} g}{c^2} + 1 = \sqrt{1 + \dfrac{g^2}{c^2} t_{1/2}^2}$
$\left(\dfrac{x_{1/2} g}{c^2} + 1\right)^2 - 1 = \dfrac{g^2}{c^2} t_{1/2}^2$
$t_{1/2} = \dfrac{c}{g}\sqrt{\left(\dfrac{x_{1/2} g}{c^2} + 1\right)^2 - 1}$
Le temps de voyage aller-retour t_{tot} correspond à 4 fois ce temps.
A.N. : $t_{tot} = 4 \times t_{1/2} = 4 \times \dfrac{299\ 792\ 458}{10}\sqrt{\left(\dfrac{19,75 \times\ 9,5 \times 10^{15} \times 10}{299\ 792\ 458^2} + 1\right)^2 - 1} = 2,6 \times 10^9$ s $= 2,6 \times 10^9/24/3600/365.25 = 82,4$ ans

Dans le référentiel de Terre, le temps aller-retour est légèrement rallongé.

Dans le référentiel de l'engin, l'engin parcourt la moitié du trajet en un temps :

$x_{1/2} = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_{1/2}\right) - 1\right]$

$\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_{1/2}\right) = \frac{g x_{1/2}}{c^2} + 1$

$\tau_{1/2} = \frac{c}{g}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{g x_{1/2}}{c^2} + 1\right)$

Le temps de voyage aller-retour τ_{tot} correspond à 4 fois ce temps.

A.N. : $\tau_{tot} = 4 \times \tau_{1/2} = 4 \times \frac{299\ 792\ 458}{10}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{19,75 \times\ 9,5 \times 10^{15} \times 10}{299\ 792\ 458^2} + 1\right) = 4,5 \times 10^8$

s $= 4,5 \times 10^8/24/3600/365.25 = 14,3$ ans

Le temps de voyage est bien plus long pour Alexandre A. Il sera plus compliqué pour lui de reprendre, après ce voyage, sa série arthurienne.