Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

Préparation au contrôle continu du 09 Novembre 2017

Pour information, le jour du contrôle continu, les documents, les laptops et les téléphones seront interdits. Les calculatrices seront autorisées à condition qu'elles soient autonomes (sans connexion internet). Les copies et feuilles de brouillon seront fournies.
La rédaction des réponses tiendra une place très importante dans la correction. Une réponse, même apparemment juste, sans explication, sans le détail des calculs ou sans la présentation des notations sera comptée comme fausse.
* Soit $V_{\Re'/\Re}$ la vitesse (algébrique) d'un repère $\Re'$ par rapport à un repère $\Re$.
On note : $\beta_{\Re'/\Re} = \dfrac{V_{\Re'/\Re}}{c}$ et $\gamma_{\Re'/\Re} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{\Re'/\Re}}}$. c étant la vitesse de la lumière dans le vide.
On rappelle les formules de transformations de Lorentz entre un repère $\Re'$ en translation suivant l'axe Ox par rapport à un repère $\Re$:

$$\begin{cases} cdt' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(cdt - \beta_{\Re'/\Re}dx\right) \\ dx' = \gamma_{\Re'/\Re}\left(dx - \beta_{\Re'/\Re}cdt\right) \end{cases} \quad ; dy' = dy \, ; dz' = dz$$

* On rappelle, d'autre part, que : si $x \ll 1$ alors
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$
$(1+x)^{-1} \approx 1 - x$
* Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}
Charge de l'électron : $q_e = -1,60217653 \times 10^{-19}$ C
* Pour l'ensemble de ces exercices, les quadrivecteurs seront notés avec un tilde : $\widetilde{x}, \widetilde{v}, ...$ tandis que les vecteurs habituels en dimension trois seront notés avec la flèche usuelle : $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, ...$

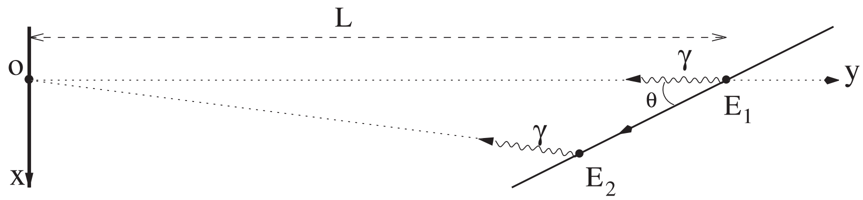
Exercice 1 : Vitesses supraluminiques

En 1977, l'astrophysicien Pearson et son équipe [1] détectent le rayonnement synchrotron émis par un jet d'électrons relativistes issu de la radiosource quasar $3C\,273$. Le suivi du jet sur la sphère céleste montre un déplacement de 0,0022 secondes d'arc par an, ce qui implique une vitesse *apparente* $v_{\rm app} = 10\,c$ à la distance $L \sim 600$ Mpc de la radiosource [2].
Ce résultat apparemment paradoxal remettrait-il en cause le postulat de la relativité restreinte selon lequel la vitesse de la lumière est une limite absolue ?

1. T.J. Pearson et *al.*, *Nature* **290** (1981), 365. Des effets similaires avaient été observés dès 1972 sur des quasars mais de façon moins convaincante pour l'ensemble de la communauté scientifique. Cet effet a été prédit théoriquement par Rees en 1966 et ne pose aucun problème à la cohérence de la relativité restreinte (cf M.Rees, *Nature* **211** (1966), 468).

2. Mpc = mega-parsec, où parsec signifie parallaxe-seconde : c'est la distance à laquelle on voit l'unité astronomique (1 U.A.=150 millions de km) sous un angle de 1 seconde d'arc, soit 1 pc=3 10^{16} m.

Pour répondre à cette question, on considère le modèle donné dans la figure ci-dessous. Un physicien $\mathcal{O}$ observe le mouvement d'une particule $\mathcal{P}$ située à une distance L de O (dans le référentiel de l'observateur), origine du repère utilisé par $\mathcal{O}$. La particule parcourt une droite faisant un angle θ avec Oy à vitesse constante v. Lorsque $\mathcal{P}$ coupe l'axe Oy, elle émet un premier photon (événement E_1). Après un temps Δt (dans le référentiel de l'observateur), elle en émet un second (événement E_2).



1. Déterminer, au premier ordre en $\beta = v/c$, l'écart $\Delta t_R = t_{R_2} - t_{R_1}$ entre les instants de réception de ces photons par l'observateur $\mathcal{O}$ en fonction de l'écart Δt entre les instants d'émission dans le même référentiel, β et θ.
2. On appelle vitesse apparente, le rapport de la distance d_{app} parcourue par la particule perpendiculairement à la ligne de visée et de l'écart Δt_R. Montrer que la vitesse apparente de $\mathcal{P}$ vue par $\mathcal{O}$ s'écrit :

$$v_{app} = v\ \frac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

3. Calculer l'angle θ_m correspondant la vitesse apparente maximale.
4. Déterminer l'expression de la vitesse apparente maximale $v_{app,\max}$ en fonction de v et de $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. En déduire les conditions sur v pour que la vitesse apparente maximale soit supérieure à c. Faire l'application numérique de la valeur limite pour v.

Exercice 2 : Désintégration d'une particule étrange en trois particules

1. Une particule (masse m_1) au repos dans le référentiel galiléen $\Re$, se désintègre en trois particules (masses respectives m_3, m_4, m_5) d'énergie $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$ et de vecteur impulsion $\overrightarrow{p}_3$, $\overrightarrow{p}_4$, $\overrightarrow{p}_5$ respectivement.

   1.1 Expliciter les relations entre les énergies et les vecteurs impulsion des particules issues de la désintégration.

   1.2 Etablir la condition sur les masses pour qu'une telle désintégration soit possible.

   1.3 Que se passe-t-il si la particule initiale est un photon ?

2. On considère la réaction suivante de désintégration d'un méson étrange K^0 en trois mésons π :

$$K^0 \longrightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$$

Les énergies de masse des particules de la réaction sont : $E_{K^0} = 497,7$ MeV ; $E_{\pi^0} = 134,97$ MeV ; $E_{\pi^\pm} = 139,57$ MeV.

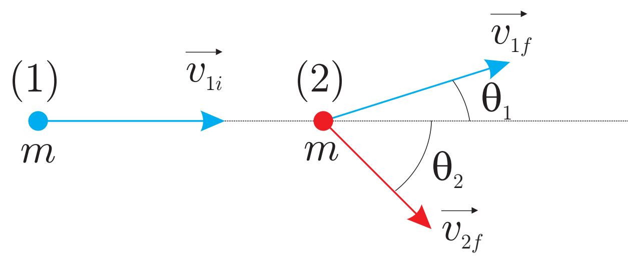
2.1 Trouver, en fonction des masses, les énergies des particules produites lorsque le vecteur impulsion de π^0 est nul.

2.2 Même question si les vecteurs impulsions de π^+ et de π^- sont égaux.

2.3 Montrer, par des considérations simples, que le cas précédent correspond à une valeur maximale de l'énergie de π^0. En déduire, en MeV, l'étendue énergétique des mésons π^0.

Exercice 3 : Collisions élastiques

On considère une collision élastique entre une particule 1 de masse m et d'énergie cinétique T avec une particule 2 de même masse m et au repos. À l'issue de la collision, les deux particules ont des énergies E_{1f} et E_{2f} inégales et leurs vecteurs vitesses sont inégalement inclinés par rapport à la direction de la particule incidente (ils forment des angles qu'on notera θ_1 et θ_2 et on pose $\alpha = \theta_1 + \theta_2$).



1. Montrer, en utilisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique, que la mécanique newtonienne prédit $\alpha = \pi/2$.
2. Utiliser maintenant la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion en relativité restreinte pour montrer que :

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(E_{1f} - mc^2)(E_{2f} - mc^2)}{(E_{1f} + mc^2)(E_{2f} + mc^2)}}$$

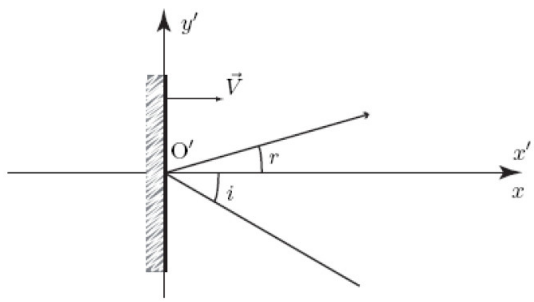
   En déduire que $\alpha \leq \pi/2$.
3. Montrer que dans le cas $\theta_1 = \theta_2$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{T}{T + 4mc^2}$$

4. Montrer que l'expression précédente reste valide dans le cas newtonien. Décrire comment se produit la diffusion des particules dans le cas où la particule incidente est ultra-relativiste.

Exercice 4 : Lois de réflexion sur un miroir en mouvement

Une onde lumineuse subit une réflexion sur un miroir plan en mouvement. On appelle $\Re'$ le référentiel comobile avec le miroir et $\Re$ le référentiel du laboratoire. $\Re'$ est en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\overrightarrow{V} = V\,\overrightarrow{e_x}$ par rapport à $\Re$. On pose : $\beta = \dfrac{V}{c}$.
Dans $\Re'$, le plan du miroir coïncide avec le plan $O'y'z'$. Le rayon lumineux est contenu dans le plan $O'x'y'$. Il arrive sur le miroir en O', en venant d'une source placée dans la région des y' négatifs. Il subit une réflexion, on désigne alors par i' et r' les valeurs absolues des angles incident et réfléchi par rapport à la normale du miroir dans $\Re'$. Le schéma ci-dessous illustre ce qui est observé dans $\Re$.

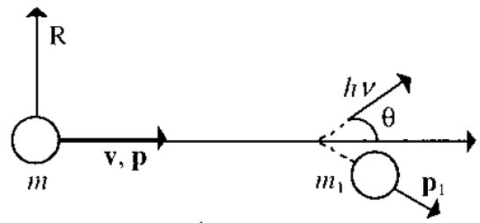


1. Justifier que les lois usuelles de la réflexion sont valides dans le référentiel où le miroir est au repos. En déduire que : $i' = r'$.
   Donner les composantes de la vitesse d'un photon du rayon lumineux dans $\Re'$ pour le cas du rayon incident et du rayon réfléchi.
2. Déterminer les composantes des vitesses des deux rayons dans $\Re$.
3. En déduire les expressions de $\cos i$, $\sin i$, $\cos r$ et $\sin r$ en fonction de i', γ et β.
   Que se passe-t-il quand $\beta \to 1$?
4. Calculer le rapport : $\dfrac{\sin r}{\sin i}$ en fonction de i' et β. Conclure.
5. Montrer que l'on a :
$$\beta = \frac{-\sin r \cos i + \cos r \sin i}{\sin i + \sin r}$$
   Application numérique : quelle est la valeur de V pour que $i = \dfrac{\pi}{6}$ et $r = \dfrac{\pi}{4}$?
6. Ecrire les composantes de la quadri-impulsion du rayon incident et du rayon émergent dans $\Re$ et $\Re'$.
   En déduire l'expression de la longueur d'onde λ_i du rayon incident en fonction de i, de i' et de la longueur d'onde λ' du rayon dans $\Re'$. De même, en déduire l'expression de la longueur d'onde λ_r du rayon réfléchi en fonction de r, de r' et de λ'.

   Application numérique : En reprenant les valeurs précédentes, déterminer λ_i et λ_r pour $\lambda = 600$ nm.

Exercice 5 : Effet Doppler-Fizeau

Considérons un atome de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport au référentiel $\Re$ du laboratoire. Cet atome émet un photon d'énergie $h\nu$ dans une direction faisant un angle θ avec la direction de $\overrightarrow{v}$ (voir figure). On pose $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}$; où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire.



Après l'émission, l'atome a une masse m_1. On note respectivement $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{p_1}$ l'impulsion de l'atome avant et après l'émission.

1. Le quadrivecteurs impulsion-énergie de l'atome avant et après l'émission sont notés $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P_1}$. Le quadrivecteur impulsion-énergie du photon est noté $\widetilde{P_\phi}$. Démontrer que l'on a la relation suivante :

$$(1)\ \widetilde{P}^2 = (\widetilde{P}, \widetilde{P}) = 2(\widetilde{P}, \widetilde{P_\phi}) + \widetilde{P_1}^2$$

2. Ecrire la relation (1) en fonction des paramètres : m, m_1, v, ν, θ. On notera $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire porté par la direction de propagation du photon. En déduire que :

$$(m^2 - m_1^2)c^2 = 2\gamma m h\nu \left(1 - \frac{v}{c}\, cos\theta\right)$$

En posant : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

3. Dans le cas où l'atome est au repos dans le référentiel $\Re$, donner l'expression de la fréquence ν_0 du photon en fonction des autres paramètres.
4. En déduire l'expression de la fréquence ν détectée dans le référentiel $\Re$, lorsque l'atome est en mouvement à une vitesse non-nulle $\overrightarrow{v}$, en fonction de la fréquence ν_0.

Exercice 6 : Bombardement de neutrons par des photons

On bombarde des noyaux avec des photons ϕ pour étudier la réaction :

$$\phi + \text{neutron} \rightarrow \pi^0 + \text{neutron}$$

On donne, pour cet exercice, l'énergie de masse du neutron : $m_n\, c^2 = 939$ MeV ainsi que celle du pion : $m_\pi\, c^2 = 135$ MeV.

1. Déterminer le seuil énergétique du photon E^*, c'est-à-dire l'énergie minimale nécessaire pour que la réaction puisse avoir lieu, dans le référentiel du centre d'inertie des particules $\Re^*$ en fonction des masses des particules.

2. En utilisant l'invariance par changement de référentiel de la pseudo-norme de la quadri-impulsion totale des particules avant le choc, déterminer le seuil énergétique E_ϕ^0 du photon ϕ lorsque le neutron cible est au repos dans le référentiel du laboratoire. Faire l'application numérique. En déduire la valeur de la longueur d'onde minimale associée pour le photon. Application numérique.

3. Dans les faits, les neutrons cibles peuvent être considérés comme en mouvement avec une énergie cinétique : $E_c = 20$ MeV. Calculer la norme de leur impulsion $p = \|\overrightarrow{p}\|$ en MeV.c^{-1}

4. Montrer que le seuil énergétique du photon s'écrit, dans ce cas, sous la forme :

$$E_\phi = E_\phi^0 \left(\frac{1}{1 + A/(m_n c^2)} \right)$$

   A étant une quantité que l'on exprimera en fonction de l'énergie cinétique des neutrons, de la norme de leur impulsion et de l'angle θ que cette impulsion fait avec la direction du photon incident.

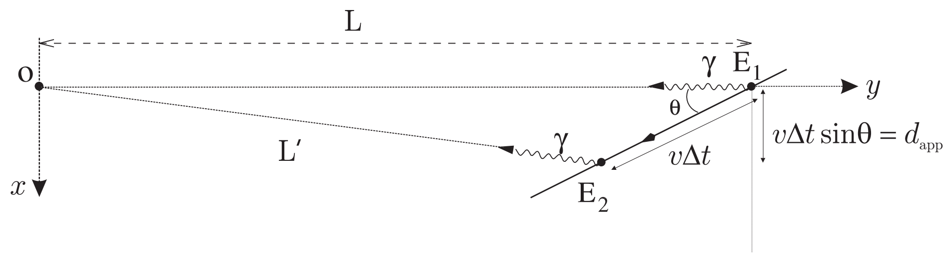
5. Calculer l'énergie de seuil dans le cas où les neutrons cibles vont à l'encontre du photon incident et dans le cas où ils vont dans la même direction. Applications numériques.

Relativité et temps

Jeudi 09 novembre 2017

Corrigé des exercices du contrôle continu de Relativité et Temps

Exercice 1 : Vitesses supraluminiques



1. On définit les événements R_1 et R_2 correspondant à la réception des photons 1 et 2 respectivement. Le calcul est le même que celui de l'effet Doppler. En effet, $t_{R_1} = t_{E_1} + L/c$ et $t_{R_2} = t_{E_2} + L'/c$,

   donc $\Delta t_R \equiv t_{R_2} - t_{R_1} = t_{E_2} - t_{E_1} + \dfrac{L' - L}{c} = \Delta t + \dfrac{L' - L}{c}$

   Or, $L'^2 = (L^2 + v^2\Delta t^2 - 2Lv\Delta t \cos\theta)^{1/2}$

   Donc $L' - L \simeq -v\Delta t \cos\theta$

   C'est-à-dire $\Delta t_R = \Delta t(1 - \beta\cos\theta)$

2. $v_{app} = \dfrac{d_{app}}{\Delta t_R} = \dfrac{v\Delta t \sin\theta}{\Delta t_R}$

   Donc $v_{app} = v\ \dfrac{\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}$

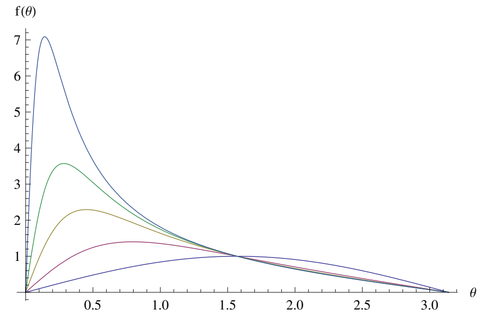
3. Posons $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}$

   Cette fonction est tracée ci-dessous. Le maximum est tel que :

   $$\frac{df}{d\theta} = -\frac{\beta - \cos\theta_m}{(\beta\cos\theta_m - 1)^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\theta_m = \beta$$

4. On a alors : $v_{app,\max} = \gamma v$

   On peut donc avoir $v_{app,\max} > c$ si $\gamma v > c$ soit $\beta > \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$. Le cas limite au-dessous duquel on n'observe pas de vitesse supraluminique correspond à une vitesse de 212000 km.s^{-1}.



Fonction $f(\theta)$ pour différentes valeurs de β (de bas en haut, $\beta = 0$, $\beta = 0,7$, $\beta = 0,9$, $\beta = 0,96$, $\beta = 0,99$)

3. Désintégration d'une particule étrange en trois particules

1. Désintégration d'une particule

   1.1 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} + \overrightarrow{p_5}$

   1.2 $m_1 \geq m_3 + m_4 + m_5$

   1.3 Si la particule initiale est un photon, la réaction n'est pas possible.

2. Désintégration d'un méson étrange

   2.1 $m_1c^2 = m_3c^2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_4} + \overrightarrow{p_5}$
   On a donc $\|\overrightarrow{p_4}\| = \|\overrightarrow{p_5}\|$ et $\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5$
   $m_1c^2 = m_3c^2 + 2\mathcal{E}_4$
   Ce qui donne :
   $$\mathcal{E}_3 = 134,97 \text{ MeV et } \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 = \frac{m_1c^2 - m_3c^2}{2} = \frac{497,7 - 134,97}{2} = 181,37 \text{ MeV}$$

   2.2 $\overrightarrow{p_4} = \overrightarrow{p_5}$ donc $m_1c^2 = \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_4$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4}$
   $4\mathcal{E}_4^2 = 4m_4^2c^4 + 4p_4^2c^2 \quad \Rightarrow \quad (m_1c^2 - \mathcal{E}_3)^2 = 4m_4^2c^4 + p_3^2c^2$
   $m_1^2c^4 - 2\mathcal{E}_3m_1c^2 + m_3^2c^4 + p_3^2c^2 = 4m_4^2c^4 + p_3^2c^2$
   $$\mathcal{E}_3 = \frac{m_1^2c^4 + m_3^2c^4 - 4m_4^2c^4}{2m_1c^2} = \frac{497,7^2 + 134,97^2 - 4 \times 139,57^2}{2 \times 497,7} = 188,87 \text{ MeV}$$
   $$\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 = \frac{m_1c^2 - \mathcal{E}_3}{2} = \frac{497,7 - 188,87}{2} = 154,42 \text{ MeV}$$

   2.3 Le cas précédent correspond à l'énergie maximale du méson π^0 car son impulsion a alors sa norme maximale. L'énergie de cette particule peut donc se trouver entre les valeurs $134,97$ MeV et $188,87$ MeV.

Exercice 3 : Collisions élastiques

1. La conservation de l'énergie cinétique donne :
   $$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$
   La conservation de l'impulsion (ou quantité de mouvement) donne :
   $$\overrightarrow{v_{1i}} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v_{1f}} + \overrightarrow{v_{2f}} \quad \Longrightarrow \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\,\overrightarrow{v_{1f}} \cdot \overrightarrow{v_{2f}}$$
   On en déduit que : $\overrightarrow{v_{1f}} \cdot \overrightarrow{v_{2f}} = 0$ soit $\alpha = \theta_1 + \theta_2 = \pi/2$.

2. Les quadrivecteurs énergie-impulsion avant et après le choc sont :
$\widetilde{p_{1i}} = \begin{pmatrix} \frac{E_{1i}}{c} \\ \overrightarrow{p_{1i}} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{p_{2i}} = \begin{pmatrix} mc \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{p_{1f}} = \begin{pmatrix} \frac{E_{1f}}{c} \\ \overrightarrow{p_{1f}} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{p_{2f}} = \begin{pmatrix} \frac{E_{1i}}{c} \\ \overrightarrow{p_{2f}} \end{pmatrix}$
La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion en relativité restreinte implique :
$$\widetilde{p_{1i}} + \widetilde{p_{2i}} = \widetilde{p_{1f}} + \widetilde{p_{2f}}$$
Prenons la pseudo-norme au carré des deux membres de l'égalité :
$(\widetilde{p_{1i}} + \widetilde{p_{2i}})^2 = (\widetilde{p_{1f}} + \widetilde{p_{2f}})^2 \qquad \Longrightarrow \qquad (\widetilde{p_{1i}}, \widetilde{p_{2i}}) = (\widetilde{p_{1f}}, \widetilde{p_{2f}})$
$\Longrightarrow \qquad mc^2 E_{1i} = E_{1f} E_{2f} - \overrightarrow{p_{1f}} \cdot \overrightarrow{p_{2f}} c^2$
Or, on a de façon générale : $pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$
et : $\overrightarrow{p_{1f}} \cdot \overrightarrow{p_{2f}} = p_{1f}\ p_{2f}\ \cos\alpha$
$$\cos\alpha = \frac{E_{1f}E_{2f} - mc^2 E_{1i}}{\sqrt{\left(E_{1f}^2 - m^2c^4\right)\left(E_{2f}^2 - m^2c^4\right)}}$$
Or : $E_{1i} + mc^2 = E_{1f} + E_{2f}$
On en déduit :
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(E_{1f} - mc^2)(E_{2f} - mc^2)}{(E_{1f} + mc^2)(E_{2f} + mc^2)}}$$
α n'est donc pas fixé et dépend des énergies finales.et $\alpha \leq \pi/2$.
3. Dans le cas $\theta_1 = \theta_2$, on a :
$p_{1f} = p_{2f} \qquad \Longrightarrow \qquad E_{1f} = E_{2f}$
$$\cos\alpha = \frac{(E_{1f} - mc^2)}{(E_{1f} + mc^2)}$$
Or : $T = E_{1i} - mc^2 \qquad$ et $\qquad E_{1i} + mc^2 = E_{1f} + E_{2f} = 2E_{1f}$
$$\cos\alpha = \frac{T}{T + 4mc^2}$$
Dans le cas non-relativiste ($T \ll mc^2$) on retrouve le résultat classique.
Dans le cas ultra-relativiste ($T \gg mc^2$) la diffusion se fait vers l'avant : $\alpha \to 0$

Exercice 4 : Lois de réflexion sur un miroir en mouvement

1. Le référentiel du miroir au repos est un référentiel Minkowskien, les lois de Descartes s'y appliquent. Donc $i' = r'$
Pour le rayon réfléchi : $v'_{rx} = c\cos i'$ et $v'_{ry} = c\sin i'$
Pour le rayon incident : $v'_{ix} = -c\cos i'$ et $v'_{iy} = c\sin i'$
2. Pour le rayon réfléchi : $v_{rx} = c\cos r = \dfrac{v'_{rx} + V}{1 + \dfrac{Vv'_{rx}}{c^2}} = c\dfrac{\cos i' + \beta}{1 + \beta\cos i'}$

et $v_{ry} = c\sin r = \dfrac{v'_{ry}}{\gamma\left(1+\dfrac{Vv'_{rx}}{c^2}\right)} = c\dfrac{\sin i'}{\gamma\,(1+\beta\cos i')}$

Pour le rayon incident : $v_{ix} = c\dfrac{-\cos r' + \beta}{1-\beta\cos r'}$ et $v_{iy} = c\dfrac{\sin r'}{\gamma\,(1-\beta\cos r')}$

3. $\cos r = \dfrac{\cos i' + \beta}{1+\beta\cos i'}$

   $\sin r = \dfrac{\sin i'}{\gamma\,(1+\beta\cos i')}$

   $\cos i = \dfrac{\cos i' - \beta}{1-\beta\cos i'}$

   $\sin i = \dfrac{\sin i'}{\gamma\,(1-\beta\cos i')}$

   Si $\beta \to 1$ $r = 0$ et $i = -\pi$

4. $\dfrac{\sin r}{\sin i} = \dfrac{1-\beta\cos i'}{1+\beta\cos i'}$

   Ce rapport est différent de 1, les lois de Descartes ne sont pas valable dans le référentiel où le miroir est en mouvement.

5. L'expression est vérifiée en remplaçant les sinus et cosinus par leurs valeurs.

   AN : $V = -0,21c$

   $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1} = 0.214\,41$

6. On a : $\dfrac{h\nu_i}{c}\sin i = \dfrac{h\nu'}{c}\sin i' \qquad \dfrac{h\nu_r}{c}\sin r = \dfrac{h\nu'}{c}\sin r'$

   $\lambda_i = \lambda'\dfrac{\sin i}{\sin i'}$ et $\lambda_r = \lambda'\dfrac{\sin r}{\sin r'}$

   AN : $\cos i' = \dfrac{+\beta + \cos i}{1+\beta\cos i} = 0,97 \Rightarrow \sin i' = 0,68 \qquad \lambda_i = 440$ nm et $\lambda_r = 1040$ nm

Exercice 5 : Effet Doppler-Fizeau

1. La loi de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie dans $\Re$ permet d'écrire :

   $\widetilde{P} = \widetilde{P_\phi} + \widetilde{P_1}$ soit $\widetilde{P} - \widetilde{P_\phi} = \widetilde{P_1}$

   $(\widetilde{P} - \widetilde{P_\phi})^2 = \widetilde{P}^2 - 2(\widetilde{P}, \widetilde{P_\phi}) + \widetilde{P_\phi}^2 = \widetilde{P_1}^2$

   $Or \widetilde{P_\phi}^2 = 0$

   $\widetilde{P}^2 = 2(\widetilde{P}, \widetilde{P_\phi}) + \widetilde{P_1}^2$

2. On a d'une part :

   $\widetilde{P}^2 = m^2c^2$ et $\widetilde{P_1}^2 = m_1^2c^2$

   D'autre part, on a :

   $(\widetilde{P}, \widetilde{P_\phi}) = \gamma mc\,\nu - ch\nu\ \overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{n}$

   $(m^2 - m_1^2)c^2 = 2\gamma mh\nu\left(1 - \dfrac{v}{c}\ cos\theta\right)$

3. $\nu = \dfrac{(m^2 - m_1^2)c^2}{2\gamma m h\nu \left(1 - \dfrac{v}{c}\, cos\theta\right)}$

   Dans le cas où l'atome est au repos dans le référentiel $\Re$:

   $\nu_0 = \dfrac{(m^2 - m_1^2)c^2}{2mh}$

4. $\nu = \dfrac{\nu_0}{\gamma \left(1 - \dfrac{v}{c}\, cos\theta\right)}$

Exercice 6 : Bombardement de neutrons par des photons

1. Dans le le référentiel du centre de masse des particules $\Re^*$, le seuil énergétique du photon E^* s'écrit :

   $E^* = (m_n + m_\pi)c^2 - m_n c^2 = m_\pi c^2$

2. Dans le référentiel du laboratoire $\Re$, il faut utiliser, dans le cas limite du seuil énergétique, la conservation par changement de référentiel de la pseudo-norme au carré de la quadri-impulsion totale des particules avant le choc (ici multipliée par c^2) :

   $(E_\phi^0 + m_n c^2)^2 - (\dfrac{E_\phi^0}{c^2} c^2)^2 = (E^* + m_n c^2)^2$

   $E_\phi^0 = \dfrac{(m_n c^2 + m_\pi c^2)^2 - m_n^2 c^4}{2 m_n c^2} = m_\pi c^2 \left(1 + \dfrac{m_\pi c^2}{2 m_n c^2}\right)$

   Application numérique : $E_\phi^0 = 145$ MeV

   On en déduit la valeur de la longueur d'onde : = 8,56.10^{-15} m

3. $p = \dfrac{\sqrt{(m_n c^2 + E_c)^2 - m_n^2 c^4}}{c} = \dfrac{\sqrt{E_c}}{c} \sqrt{E_c + 2 m_n c^2}$

   Application numérique : $p = 195$ MeV.c^{-1}

4. On a maintenant :

   $(E_\phi + m_n c^2 + E_c)^2 - ((p + \overrightarrow{p_\phi})^2 c^2)^2 = (E^* + m_n c^2)^2$

   $(m_n c^2)^2 + 2E_\phi m_n c^2 + 2E_\phi E_c - 2p \bullet \overrightarrow{p_\phi} c^2 = (E^* + m_n c^2)^2$

   $(m_n c^2)^2 + 2E_\phi m_n c^2 + 2E_\phi E_c - 2p p_\phi cos\theta c^2 = (E^* + m_n c^2)^2$

   $E_\phi = E_\phi^0 \left(\dfrac{1}{1 + A/(m_n c^2)}\right)$

   Avec $A = E_c + pc\, cos\theta$

5. Si la cible se rapproche du photon incident :

   $A = 205$ MeV et $E_\phi = 118$ MeV

   Si la cible va en sens inverse du cas précédent :

   $A =$- 175 MeV et $E_\phi = 178$ MeV