Master de Physique 1ère année
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD5bis Métriques

Ondes gravitationnelles

Questions préliminaires :
Soit la métrique de l'espace-temps de Minkowski :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{avec} \begin{cases} \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ \eta_{kk} = -1 \text{ avec } k = 1, 2, 3 \\ \eta_{00} = 1 \end{cases}$$

a- Déterminer les valeurs des différents symboles de Christoffel : $\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau} \right)$
b- Les géodésiques suivent les équations :

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

En déduire l'expression de ces équations dans cet espace-temps.

Ondes gravitationnelles
Les ondes gravitationnelles sont des perturbations de l'espace-temps cré ées par des objets massifs ayant des variations importantes de leur distribution de masse dans le référentiel de l'observateur. Ces perturbations se propagent à la vitesse c.

On étudie le cas d'une onde gravitationnelle plane qui se propage dans la direction $x^3 = z$. On pose : $x^0 = ct$; $x^1 = x$; $x^2 = y$. On suppose que la perturbation de l'espace-temps qu'elle induit peut se dé crire sous la forme de la métrique :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \left(1 + a \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right) dx^2 - \left(1 - a \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right) dy^2 - dz^2$$

où ω représente la pulsation de l'onde et a son amplitude relative : $a \ll 1$ (l'ordre de grandeur des détections actuelles est : $a \approx 10^{-21}$).

c- Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.

d- Calculer le symbole de Christoffel $\Gamma^{\ 3}_{1\ 1}$.

Supposons que l'on cherche à détecter une onde gravitationnelle. Pour cela, on dispose de deux masses A et B libres dans l'espace-temps, proches l'une de l'autre et initialement au repos dans le référentiel de l'observateur.

Dans ce qui suit, la lettre entre parenthèse (A) ou (B) n'est pas un indice ou un exposant mais indique de quelle masse il s'agit. Lorsqu'aucune indication de ce type n'est donnée, cela signifie que la relation est valide pour les deux masses.

On suppose que les positions initiales des deux masses sont :
$X^i_{(A)} = (0,0,0)$ et $X^i_{(B)} = \left(x_{(B)}, y_{(B)}, z_{(B)}\right)$.

En l'absence d'onde, la métrique de l'espace-temps est celle de Minkowski. Les coordonnées de ces deux masses vont suivre l'équation des géodésiques donnée ci-dessus en **(b)**. On choisit de poser : $cd\tau = ds$.

Lorsque l'onde arrive sur ces deux masses, leur position va varier avec une faible amplitude par rapport à la position initiale :

$$x^i_{(A)} = X^i_{(A)} + \epsilon^i_{(A)} \qquad x^i_{(B)} = X^i_{(B)} + \epsilon^i_{(B)}$$

e- L'amplitude relative des ondes gravitationnelles étant très petite devant 1, on peut poser que les quantités ϵ^i, $\frac{d\left(\epsilon^\alpha\right)}{d\tau}$ et $\frac{d^2\left(\epsilon^\alpha\right)}{d\tau^2}$ représentent le premier ordre de la perturbation due à l'onde et qu'il en est de même pour les symboles de Christoffel. Justifier qu'au premier ordre, en posant $cd\tau = ds$, l'équation des géodésiques peut s'écrire pour ces deux masses :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\epsilon^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^{\sigma}_{0\,0} = 0$$

f- Calculer le symbole de Christoffel $\Gamma^{\sigma}_{0\,0}$. En déduire que les deux masses ne changent pas de position au premier ordre lors du passage d'une onde gravitationnelle.

g- On suppose maintenant que les deux masses sont placées sur l'axe $Ox^1 = Ox$. On mesure de façon simultanée dans le référentiel de l'observateur (t est fixé), la pseudo-distance entre les deux masses lors du passage de l'onde :

$$L = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{|g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta|}$$

Calculer L. Commenter.

Master de Physique 1ère année
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD5bis Métriques
Correction sommaire

Ondes gravitationnelles

Questions préliminaires :

a- $\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta} = \dfrac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\alpha,\beta} + g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\tau}\right) = 0$

b- $\dfrac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = 0$

Ondes gravitationnelles

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \left(1 + a\sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right)\ dx^2 - \left(1 - a\sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right)\ dy^2 - dz^2$$

c- $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0$

$g_{00} = \dfrac{1}{g^{00}} = 1$

$g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}} = -\left(1 + a\sin\left(\omega\left(t - \dfrac{z}{c}\right)\right)\right)$

$g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}} = -\left(1 - a\sin\left(\omega\left(t - \dfrac{z}{c}\right)\right)\right)$

$g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}} = -1$

d- $\Gamma^{\ 3}_{1\ 1} = \dfrac{1}{2} g^{33}\left(g_{31,1} + g_{31,1} - g_{11,3}\right) = +\dfrac{1}{2} a \dfrac{\omega}{c}\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{z}{c}\right)\right)$

$$x^i = X^i_{(A)} + \epsilon^i_{(A)} \qquad x^i_{(B)} = X^i_{(B)} + \epsilon^i_{(B)}$$

e- ϵ^i, $\dfrac{d\epsilon^\alpha}{d\tau}$ et $\dfrac{d^2\epsilon^\alpha}{d\tau^2}$ représentent toutes le premier ordre. Justifier qu'au premier ordre, l'équation des géodésiques peut s'écrire pour ces deux masses :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2 X^\sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\epsilon^\sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2}\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta}\frac{d\left(X^\alpha + \epsilon^\alpha\right)}{d\tau}\frac{d\left(X^\beta + \epsilon^\beta\right)}{d\tau} = 0$$

Or $\dfrac{d^2 X^\sigma}{d\tau^2} = 0$ et les termes en $\Gamma^{\ \sigma}_{\alpha\ \beta}\dfrac{d\left(\epsilon^\alpha\right)}{d\tau}$ sont du deuxième ordre ou plus.

Donc il reste : $\quad \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\epsilon^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^{\ \sigma}_{0\ 0} = 0$

f- $\Gamma^{\ \sigma}_{0\ 0} = \dfrac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau 0,0} + g_{\tau 0,0} - g_{00,\tau}\right) = 0$

Donc $\dfrac{d^2\epsilon^\sigma}{d\tau^2} = 0$ Les deux masses sont au repos à l'origine donc $\dfrac{d\epsilon^\sigma}{d\tau} = 0$. Les deux masses ne changent pas de position.

g- $L = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\left(1 + a \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right)}\, dx =$

$\sqrt{(1 + a\sin(\omega t))}\,\left(x_{(B)} - x_{(A)}\right) \approx \left(x_{(B)} - x_{(A)}\right)\left(1 + \frac{1}{2} a \sin(\omega t)\right)$

Donc la distance varie alors que les positions restent les mêmes!!!