**Master de Physique 1ère année**
**Relativité et temps**
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

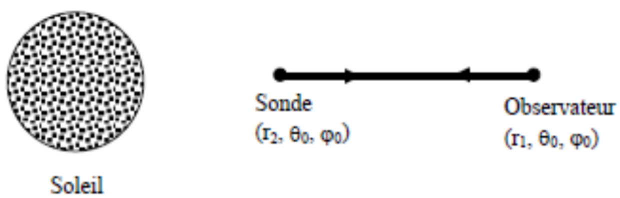
**TD5 Métriques**

## 1. Effet Shapiro

*On utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.*

Un observateur sur Terre reçoit un signal radar d'une sonde située entre la Terre et le Soleil dans le Système Solaire.

L'observateur comme la sonde sont plongés dans le champ gravitationnel du Soleil, on négligera celui de la Terre ou de tout autre corps du Système Solaire. On suppose que l'effet du champ gravitationnel solaire peut être représenté par une métrique d'Eddington et Robertson.




La métrique d'Eddington et Robertson peut se développer dans un formalisme donnant des paramètres supplémentaires par rapport à la relativité générale ; cela constitue le formalisme PPN (Post-Parametrized Newtonian). Pour cet exercice, la métrique étudiée est :

$$ds^2 = c^2 d\ ^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\ ^2 + r^2 \sin^2\ d'\ ^2\right)$$

où $G$ est la constante de gravitation et $M$ la masse du Soleil.

Pour la relativité générale, on a $\ = 1$, mais, pour cet exercice, on suppose que la valeur de reste un paramètre libre et on ne fixe pas sa valeur.

1. Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.
2. *Pour la suite du problème, on considèrera le cas d'un photon du signal radar.*
   Que devient l'équation de la métrique ?
3. On suppose que la trajectoire est radiale : $d\ = d'\ = 0$
   Montrer que l'on a alors :
   $$\frac{dt}{dr} = c^{-1}\sqrt{\left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}}$$
4. En déduire, au premier ordre en $\frac{GM}{c^2 r}$, que :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c} + (1 + \quad)\,\frac{GM}{c^3 r}$$

5. En déduire l'expression du temps de trajet d'un photon allant de la sonde ($r_1$) vers l'observateur ($r_2$).

   Montrer que ce temps de trajet peut être interprêté sous la forme de deux termes que l'on exprimera en fonction des données du problème : un terme purement géométrique de propagation du photon et un terme relativiste de retard dû uniquement au fait que le photon se déplace dans un potentiel gravitationnel variable.

## 2. Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild

L'étude du mouvement d'une planète dans le champ de gravitation créé par le soleil peut être assimilé à celui d'une petite particule qui ne perturbe pas le champ de gravitation à symétrie centrale sphérique étudié par Schwarzschild. La métrique de l'espace temps où évolue la particule est donnée par

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\ {}^2 - r^2 \sin\ {}^2 d\ {}^2 :$$

On suppose que la particule est initialement dans le plan $\ = \frac{\pi}{2}$. On peut montrer en utilisant les équations d'Euler-Lagrange ou l'équation des géodésiques que les quantités

$$Q = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{ds};$$

$$K = \left(r^2 \frac{d\ }{ds}\right)^{-1}$$

sont constantes.

1. Le cas d'une particule de masse non nulle.

   1.1 Que représente ces deux constantes ?

   1.2 Exprimer la métrique en fonction de $Q$ et $K$.

   1.3 Montrer que

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\ }\right)^2 + \frac{1}{r^2} = K^2(c^2 Q^2 - 1) + \frac{2GMK^2}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2 r^3}:$$

   1.4 En posant $u = \frac{1}{r}$ montrer que

$$\frac{d^2 u}{d\ {}^2} + u = \frac{GM}{c^2} K^2 + \frac{3GM}{c^2} u^2 :$$

   Quelle est l'analogue Newtonien de cette équation ?

2. Le cas de la lumière, un problème historique.

2.1 Lorsque l'on considère des géodésiques de genre lumière, que vaut K ?

2.2 On souhaite résoudre l'équation

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2.$$

La résolution de cette équation est un problème difficile et l'on souhaite simplifier sa résolution en utilisant le fait que $\frac{GM}{c^2r} \ll 1$ autrement dit on cherche une solution $u$ par méthode de perturbation qui pour cet exercice sera simplement au premier ordre en $\frac{GM}{c^2r}$. La méthode à suivre est de premièrement déterminer la solution $u_0$ de l'équation sans second membre puis de définir $u = u_0 + u_1$ où $u_1$ contiendra tous les termes au premier ordre en $\frac{GM}{c^2r}$.

2.3 Montrer que $u_0 = \frac{\cos\phi}{R}$ est solution de l'équation sans second membre avec $R$ une constante d'intégration.

2.4 En utilisant donc le fait que la solution cherchée sera $u = u_0 + u_1$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_1$.

2.5 On pose $u_1 = \frac{GM}{c^2R^2}(\cos^2\phi + 2\sin^2\phi)$, $x = r\cos\phi$ et $y = r\sin\phi$. Montrer que

$$x = R - \frac{GM}{c^2R}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

2.6 Montrer que les asymptotes de la trajectoire ont pour équation

$$x = R \pm \frac{2GM}{c^2R}y \tag{1}$$

2.7 En déduire ainsi l'angle correspondant à la déviation de lumière.

Une déviation mesurable nécessite la présence d'un champ de gravitation intense. La première mesure fut réalisé en 1919 en observant la déviation des rayons passant en incidence rasante au voisinage du Soleil.

## 3 - Une histoire de singularité

La métrique de Schwarzschild dans ses coordonnées usuelles $(ct, r, \theta, \phi)$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2.$$

a ses deux premiers coefficients qui deviennent infinis à $r = 0$ et $r = \frac{2GM}{c^2}$.

Dans cet exercice il est proposé de montrer que l'on peut par un changement de coordonnées faire "disparaître" la singularité $r = \frac{2GM}{c^2}$, dite singularité de coordonnées.

1. Géodésiques lumières radiales.

1.1 Donner les coefficients de la métrique de Schwarzschild ainsi que leur inverse.

1.2 Dans le cadre des géodésiques lumières radiales, on se place à  et  constant. Que devient l'équation de la métrique ?

1.3 On ne va considérer que le cas des géodésiques lumières radiales dites entrantes pour lesquelles $\frac{dr}{dt} < 0$. Montrer alors que l'on a

$$cdt = -\frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

1.4 En intégrant l'équation obtenue pour $cdt$, montrer que l'équation des géodésiques lumières radiales entrantes est

$$ct = -r - R_S ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) + K;$$

avec $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ et $K$ une constante réelle.

1.5 Si l'on suppose que $r \gg R_S$ que devient cette équation et quel résultat retrouve-t-on ?

2. Changement de coordonnées

On pose $v = ct + r + R_S ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$

2.1 Exprimer la métrique de Schwarzschild dans les coordonnées $(v; r; \; ; \;)$.

2.2 Commenter.

$(v; r; \; ; \;)$ s'appellent les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes. Il existe aussi celle qui sont sortantes. Il suffit de changer le signe de la variation de r selon le temps.

La singularité $r = 0$ est géométrique. En effet on définit la forme covariante du tenseur de Riemann $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\zeta}R^{\zeta}{}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\zeta}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\zeta}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\zeta}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\zeta}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$
et l'on peut montrer "facilement" que $R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{12R_S^2}{r^6}$

**Master de Physique 1ère année**
**Relativité et temps**
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

**TD5 Métriques**
Correction sommaire

## 1. Effet Shapiro

$$ds^2 = c^2 d\ {}^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\ {}^2 + r^2 \sin^2\ d'\ {}^2\right)$$

1. $g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{g^{00}} \qquad g_{11} = 1 + \ \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{g^{11}}$
   $g_{22} = \left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 = \frac{1}{g^{22}} \qquad g_{33} = \left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 \sin^2\ = \frac{1}{g^{33}}$
2. $ds = 0$
3. $d\ = d'\ = 0$
   $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2$
   $\frac{dt}{dr} = c^{-1} \sqrt{\left(1 + \ \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}}$
4. $\frac{dt}{dr} = c^{-1}\left(1 + \ \frac{GM}{c^2 r}\right)\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right) = \frac{1}{c} + (1 + \ )\frac{GM}{c^3 r}$
5. $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{c} + (1 + \ )\frac{GM}{c^3 r}\right) dr = \frac{r_2 - r_1}{c} + (1 + \ )\frac{GM}{c^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
   Le premier terme est purement géométrique et le deuxième relativiste.

## 2. Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild

1.2) On a

$$\left(\frac{d\ }{ds}\right)^2 = \frac{1}{K^2 r^4}; \qquad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = Q^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2}; \tag{2}$$

et comme $\ = \ = 2$, on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\ {}^2: \tag{3}$$

On a donc

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\ }{ds}\right)^2 = 1; \tag{4}$$

ce qui donne

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} Q^2 c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{1}{K^2 r^2} = 1; \tag{5}$$

1.3) En posant

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d}\frac{d}{ds} = \frac{1}{Kr^2}\frac{dr}{d}$$

Eq. (**??**) devient

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} Q^2c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{Kr^2}\frac{dr}{d}\right)^2 - \frac{1}{K^2r^2} = 1;$$

ce qui donne le résultat souhaité après simplification.
1.4) En posant $u = 1=r$, on a

$$\frac{du}{d} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left(\frac{du}{d}\right)^2 + u^2 = K^2(Q^2c^2 - 1) + 2GMK^2u + \frac{2GM}{c^2}u^3:$$

Il suffit de dériver l'expression précédente par rapport à  (on pose $u' = du=d$ ),

$$2u'u'' + 2uu' = \frac{2GMK^2}{c^2}u' + 6\frac{GM}{c^2}u'u^2$$

soit encore

$$u'' + u = \frac{GMK^2}{c^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

L'analogue Newtonien est l'équation de Binet.
2.1) S'il s'agit d'une particule lumineuse, $ds = 0$, ce qui revient à $K = 0$.
2.2) et 2.3) On veut résoudre $u'' + u = 3GMu^2=c^2$. En posant, $u = u_0 + u_1$, on a

$$u_0'' + u_1'' + u_0 + u_1 = \frac{3GM}{c^2}\left(u_0^2 + u_1^2 + 2u_0u_1\right):$$

Considérant $GMu_0=c^2$ comme déjà petit, on arrive à

$$u_0'' + u_0 = 0$$

dont la solution est cos  modulo une constante que l'on posera comme $1=R$.
2.4) A l'ordre $u_1$, on a

$$u_1'' + u_1 = \frac{3GM}{c^2}u_0^2$$

2.5) on a $1=r = u_0 + u_1$. Donc

$$\frac{1}{r} = R - \frac{GM}{c^2R^2}\left(\frac{x^2 + 2y^2}{r^2}\right)$$

soit naturellement après simplification

$$x = R - \frac{GM}{c^2R}\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}:$$

2.6) En fixant $x$ et en prenant la limite $y >> x$ , on a

$$x = R - \frac{GM}{c^2R}\frac{2y^2}{\sqrt{y^2}} = R - \frac{GM}{c^2R}\frac{2y^2}{|y|} = R \pm \frac{2GM}{c^2R}y$$

2.7) L'angle total de déviation  sera $= 2\arctan(\frac{2GM}{c^2R}) \approx \frac{4GM}{c^2R}$

**3. Une histoire de singularité**

1. Géodésiques lumières radiales. On pose $R_S = \frac{2GM}{c^2}$.

   1.1 Voir exercice précédent ou le cours.

   1.2 Comme et sont constants alors $d \quad = d \quad = 0$ et que l'on considère une géodésique lumière donc $ds = 0$ ainsi on obtient

   $$0 = (1 - \frac{R_S}{r})c^2dt^2 - (1 - \frac{R_S}{r})^{-1}dr^2$$

   1.3 On utilise l'équation précédente :

   $$c^2dt^2 = (1 - \frac{R_S}{r})^{-2}dr^2$$

   Comme on veut les géodésiques entrantes c'est à dire $\frac{dr}{dt} < 0$, on obtient le résultat.

   1.4 On pose pour simplifier l'intégration $x = \frac{r}{R_S}$. On intègre entre 0 et $t$ l'équation

   $$c^2dt^2 = (1 - \frac{R_S}{r})^{-2}dr^2$$

   et l'on obtient

   $$ct = -R_S \int_{x_0}^{x} \frac{x}{x-1}dx = -R_S \int_{x_0}^{x} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -R_S(x + ln(x-1) - x_0 - ln(x_0 - 1))$$

   d'où

   $$ct = -R_S x - R_S ln(x-1) + K$$

   avec $K = R_S(x_0 + ln(x_0 - 1))$ une constante. En utilisant l'expression de $x$ on obtient le résultat en fonction de $r$.

   1.5 Lorsque $r >> R_S$ le terme $R_S ln(\frac{r}{R_S} - 1)$ est négligeable. On retrouve donc l'équation des rayons lumineux radiaux de l'espace-temps de Minkowski. Autrement dit le terme $R_S ln(\frac{r}{R_S} - 1)$ est du à la masse du corps.

2. Changement de coordonnées

   2.1 On remarque que dans les nouvelles coordonnées la composante $ct$ "n'est plus là". Ce qui suggère d'exprimer $ct$ en fonction de $v$ et des autres composantes.

   $$ct = v - r - R_S ln(\frac{r}{R_S} - 1)$$

   On calcul la différentielle de $ct$ et l'on obtient

   $$cdt = dv - \frac{r}{r - R_S}dr$$

   On insert l'expression de $cdt$ dans la métrique et l'on obtient après simplification

   $$ds^2 = (1 - \frac{R_S}{r})dv^2 - 2dvdr - r^2(d\ ^2 + \sin^2\ d\ ^2)$$

   2.2 La métrique n'est plus diagonale dans ces coordonnées mais lorsque $r$ tend vers $R_S$ le coefficient $(1 - \frac{R_S}{r})$ 1