

Master de Physique 1ère année

Relativité et temps

M.-Ch. Angonin, M. Grould et Ch. Le Poncin-Lafitte

2016-2017

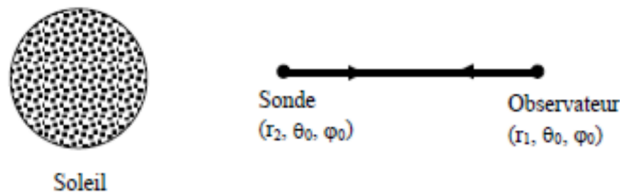
TD5 Métriques

1. Effet Shapiro

On utilisera une notation telle que les indices et exposants en lettres romaines vont de 1 à 3 inclus tandis que ceux en lettres grecques vont de 0 à 3 inclus.

Un observateur sur Terre reçoit un signal radar d'une sonde située entre la Terre et le Soleil dans le Système Solaire.

L'observateur comme la sonde sont plongés dans le champ gravitationnel du Soleil, on négligera celui de la Terre ou de tout autre corps du Système Solaire. On suppose que l'effet du champ gravitationnel solaire peut être représenté par une métrique d'Eddington et Robertson.



La métrique d'Eddington et Robertson peut se développer dans un formalisme donnant des paramètres supplémentaires par rapport à la relativité générale ; cela constitue le formalisme PPN (Post-Parametrized Newtonian). Pour cet exercice, la métrique étudiée est :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où G est la constante de gravitation et M la masse du Soleil.

Pour la relativité générale, on a $\gamma = 1$, mais, pour cet exercice, on suppose que la valeur de γ reste un paramètre libre et on ne fixe pas sa valeur.

1. Donner les différentes valeurs de $g_{\alpha\beta}$. Déterminer les éléments contravariants $g^{\alpha\beta}$ de la métrique.

2. Pour la suite du problème, on considèrera le cas d'un photon du signal radar.

Que devient l'équation de la métrique ?

3. On suppose que la trajectoire est radiale : $d\theta = d\varphi = 0$

Montrer que l'on a alors :

$$\frac{dt}{dr} = c^{-1} \sqrt{\left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}}$$

4. En déduire, au premier ordre en $\frac{GM}{c^2 r}$, que :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c} + (1 + \gamma) \frac{GM}{c^3 r}$$

5. En déduire l'expression du temps de trajet d'un photon allant de la sonde (r_1) vers l'observateur (r_2).

Montrer que ce temps de trajet peut être interprété sous la forme de deux termes que l'on exprimera en fonction des données du problème : un terme purement géométrique de propagation du photon et un terme relativiste de retard dû uniquement au fait que le photon se déplace dans un potentiel gravitationnel variable.

2. Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild

L'étude du mouvement d'une planète dans le champ de gravitation créé par le soleil peut être assimilé à celui d'une petite particule qui ne perturbe pas le champ de gravitation à symétrie centrale sphérique étudié par Schwarzschild. La métrique de l'espace temps où évolue la particule est donnée par

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

On suppose que la particule est initialement dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$. On peut montrer en utilisant les équations d'Euler-Lagrange ou l'équation des géodésiques que les quantités

$$Q = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{ds},$$

$$K = \left(r^2 \frac{d\phi}{ds}\right)^{-1}$$

sont constantes.

1. Le cas d'une particule de masse non nulle.

1.1 Que représente ces deux constantes ?

1.2 Exprimer la métrique en fonction de Q et K .

1.3 Montrer que

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = K^2(c^2 Q^2 - 1) + \frac{2GMK^2}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2 r^3}.$$

- 1.4 En posant $u = \frac{1}{r}$ montrer que

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{c^2} K^2 + \frac{3GM}{c^2} u^2.$$

Quelle est l'analogie Newtonien de cette équation ?

2. Le cas de la lumière, un problème historique.

- 2.1 Lorsque l'on considère des géodésiques de genre lumière, que vaut K ?
 2.2 On souhaite résoudre l'équation

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2.$$

La résolution de cette équation est un problème difficile et l'on souhaite simplifier sa résolution en utilisant le fait que $\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$ autrement dit on cherche une solution u par méthode de perturbation qui pour cet exercice sera simplement au premier ordre en $\frac{GM}{c^2 r}$. La méthode à suivre est de premièrement déterminer la solution u_0 de l'équation sans second membre puis de définir $u = u_0 + u_1$ où u_1 contiendra tous les termes au premier ordre en $\frac{GM}{c^2 r}$.

- 2.3 Montrer que $u_0 = \frac{\cos \phi}{R}$ est solution de l'équation sans second membre avec R une constante d'intégration.
 2.4 En utilisant donc le fait que la solution cherchée sera $u = u_0 + u_1$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par u_1 .
 2.5 On pose $u_1 = \frac{GM}{c^2 R^2} (\cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi)$, $x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$. Montrer que

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} \left(\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

- 2.6 Montrer que les asymptotes de la trajectoire ont pour équation

$$x = R \pm \frac{2GM}{c^2 R} y \tag{1}$$

- 2.7 En déduire ainsi l'angle α correspondant à la déviation de lumière.

Une déviation mesurable nécessite la présence d'un champ de gravitation intense. La première mesure fut réalisée en 1919 en observant la déviation des rayons passant en incidence rasante au voisinage du Soleil.

3 - Une histoire de singularité

La métrique de Schwarzschild dans ses coordonnées usuelles (ct, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

à ses deux premiers coefficients qui deviennent infinis à $r = 0$ et $r = \frac{2GM}{c^2}$.

Dans cet exercice il est proposé de montrer que l'on peut par un changement de coordonnées faire "disparaître" la singularité $r = \frac{2GM}{c^2}$, dite singularité de coordonnées.

1. Géodésiques lumières radiales.

- 1.1 Donner les coefficients de la métrique de Schwarzschild ainsi que leur inverse.

- 1.2 Dans le cadre des géodésiques lumières radiales, on se place à θ et ϕ constant. Que devient l'équation de la métrique ?
- 1.3 On ne va considérer que le cas des géodésiques lumières radiales dites entrantes pour lesquelles $\frac{dr}{dt} < 0$. Montrer alors que l'on a

$$cdt = -\frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

- 1.4 En intégrant l'équation obtenue pour cdt , montrer que l'équation des géodésiques lumières radiales entrantes est

$$ct = -r - R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right) + K,$$

avec $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ et K une constante réelle.

- 1.5 Si l'on suppose que $r \gg R_S$ que devient cette équation et quel résultat retrouve-t-on ?

2. Changement de coordonnées

On pose $v = ct + r + R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right)$

- 2.1 Exprimer la métrique de Schwarzschild dans les coordonnées (v, r, θ, ϕ) .

- 2.2 Commenter.

(v, r, θ, ϕ) s'appellent les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes. Il existe aussi celle qui sont sortantes. Il suffit de changer le signe de la variation de r selon le temps.

La singularité $r = 0$ est géométrique. En effet on définit la forme covariante du tenseur de Riemann $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\zeta} R^\zeta_{\sigma\mu\nu} = R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\zeta_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\zeta_{\mu\sigma} + \Gamma^\zeta_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\zeta_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$ et l'on peut montrer "facilement" que $R_{\rho\sigma\mu\nu} R^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{12R_S^2}{r^6}$

TD5 Métriques

Correction sommaire

1. Effet Shapiro

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$1. \quad g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{g^{00}} \quad g_{11} = 1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{g^{11}}$$

$$g_{22} = \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 = \frac{1}{g^{22}} \quad g_{33} = \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{g^{33}}$$

$$2. \quad ds = 0$$

$$3. \quad d\theta = d\varphi = 0$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2$$

$$\frac{dt}{dr} = c^{-1} \sqrt{\left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}}$$

$$4. \quad \frac{dt}{dr} = c^{-1} \left(1 + \gamma \frac{GM}{c^2 r}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right) = \frac{1}{c} + (1 + \gamma) \frac{GM}{c^3 r}$$

$$5. \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{c} + (1 + \gamma) \frac{GM}{c^3 r}\right) dr = \frac{r_2 - r_1}{c} + (1 + \gamma) \frac{GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Le premier terme est purement géométrique et le deuxième relativiste.

2. Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild

1.2) On a

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \frac{1}{K^2 r^4}, \quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = Q^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2}, \quad (2)$$

et comme $\theta = \pi/2$, on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (3)$$

On a donc

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1, \quad (4)$$

ce qui donne

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} Q^2 c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{1}{K^2 r^2} = 1, \quad (5)$$

1.3) En posant

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{Kr^2} \frac{dr}{d\phi}$$

Eq. (5) devient

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} Q^2 c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{Kr^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{K^2 r^2} = 1,$$

ce qui donne le résultat souhaité après simplification.

1.4) En posant $u = 1/r$, on a

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = K^2(Q^2 c^2 - 1) + 2GMK^2 u + \frac{2GM}{c^2} u^3.$$

Il suffit de dériver l'expression précédente par rapport à ϕ (on pose $u' = du/d\phi$),

$$2u'u'' + 2uu' = \frac{2GMK^2}{c^2} u' + 6\frac{GM}{c^2} u'u^2$$

soit encore

$$u'' + u = \frac{GMK^2}{c^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2$$

L'analogie Newtonien est l'équation de Binet.

2.1) S'il s'agit d'une particule lumineuse, $ds = 0$, ce qui revient à $K = 0$.

2.2) et 2.3) On veut résoudre $u'' + u = 3GMu^2/c^2$. En posant, $u = u_0 + u_1$, on a

$$u_0'' + u_1'' + u_0 + u_1 = \frac{3GM}{c^2} (u_0^2 + u_1^2 + 2u_0 u_1).$$

Considérant GMu_0/c^2 comme déjà petit, on arrive à

$$u_0'' + u_0 = 0$$

dont la solution est $\cos \phi$ modulo une constante que l'on posera comme $1/R$.

2.4) A l'ordre u_1 , on a

$$u_1'' + u_1 = \frac{3GM}{c^2} u_0^2$$

2.5) on a $1/r = u_0 + u_1$. Donc

$$\frac{1}{r} = R - \frac{GM}{c^2 R^2} \left(\frac{x^2 + 2y^2}{r^2}\right)$$

soit naturellement après simplification

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2.6) En fixant x et en prenant la limite $y \gg x$, on a

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{2y^2}{\sqrt{y^2}} = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{2y^2}{|y|} = R \pm \frac{2GM}{c^2 R} y$$

2.7) L'angle total de déviation α sera $\alpha = 2 \arctan\left(\frac{2GM}{c^2 R}\right) \approx \frac{4GM}{c^2 R}$

3. Une histoire de singularité

1. Géodésiques lumières radiales. On pose $R_S = \frac{2GM}{c^2}$.

1.1 Voir exercice précédent ou le cours.

1.2 Comme θ et ϕ sont constants alors $d\theta = d\phi = 0$ et que l'on considère une géodésique lumière donc $ds = 0$ ainsi on obtient

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

1.3 On utilise l'équation précédente :

$$c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-2} dr^2$$

Comme on veut les géodésiques entrantes c'est à dire $\frac{dr}{dt} < 0$, on obtient le résultat.

1.4 On pose pour simplifier l'intégration $x = \frac{r}{R_S}$. On intègre entre 0 et t l'équation

$$c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-2} dr^2$$

et l'on obtient

$$ct = -R_S \int_{x_0}^x \frac{x}{x-1} dx = -R_S \int_{x_0}^x \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -R_S(x + \ln(x-1) - x_0 - \ln(x_0-1))$$

d'où

$$ct = -R_S x - R_S \ln(x-1) + K$$

avec $K = R_S(x_0 + \ln(x_0-1))$ une constante. En utilisant l'expression de x on obtient le résultat en fonction de r .

1.5 Lorsque $r \gg R_S$ le terme $R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$ est négligeable. On retrouve donc l'équation des rayons lumineux radiaux de l'espace-temps de Minkowski. Autrement dit le terme $R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$ est dû à la masse du corps.

2. Changement de coordonnées

2.1 On remarque que dans les nouvelles coordonnées la composante ct "n'est plus là". Ce qui suggère d'exprimer ct en fonction de v et des autres composantes.

$$ct = v - r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

On calcul la différentielle de ct et l'on obtient

$$cdt = dv - \frac{r}{r - R_S} dr$$

On insert l'expression de cdt dans la métrique et l'on obtient après simplification

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

2.2 La métrique n'est plus diagonale dans ces coordonnées mais lorsque r tend vers R_S le coefficient $\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}$ de la métrique ne diverge plus.