[illegible]
[illegible]
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

[illegible]

1. [illegible]

On se propose dans cet exercice d'effectuer quelques manipulations tensorielles dans l'espace Euclidien à trois dimensions. On utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. On prend un système de coordonnées cartésiennes x^i $(i = 1, 2, 3)$ dans lequel la métrique Euclidienne s'écrit :

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Application : formules d'analyse vectorielle

   1.1 Montrer que les composantes covariantes et contravariantes sont égales.

   1.2 Ecrire en notation indicielle le produit scalaire de deux vecteurs. En déduire l'expression du théorème de l'énergie cinétique classique (notations libres).

   1.3 Écrire en notation indicielle les opérateurs gradient, divergence, laplacien scalaire, laplacien vectoriel.

2. Autres systèmes de coordonnées

   Déterminer l'expression de la métrique newtonienne en coordonnées cylindriques puis sphériques.

2. [illegible]

On se place maintenant dans l'espace de Minkowski muni de la métrique :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique permet de définir des composantes covariantes à partir de composantes contravariantes :

$$T_{\mu}{}^{\rho\sigma\ldots} \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\nu\rho\sigma\ldots}$$

1. Montrer que $\eta_{\mu}{}^{\nu} = \eta^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ c'est-à-dire, la matrice identité.
2. En déduire que $\eta^{\mu\nu}$ peut servir à définir des composantes contravariantes à partir de composantes covariantes.
3. Déterminer les composantes covariantes du quadrivecteur A à partir des composantes contravariantes $A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$? Expliciter $\partial_{\mu} A^{\mu}$ et montrer que $\partial^{\mu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu}$.
4. Vérifier que : $\partial_{\mu} = \left(\partial_0, \overrightarrow{\nabla}\right)$ et que $\partial^{\mu} = \left(\partial_0, -\overrightarrow{\nabla}\right)$

3. [illegible]

Une solution exacte des équations d'Einstein a été découverte par 4 scientifiques : la métrique FLRW. Elle décrit un espace-temps de géométrie homogène et isotrope. En cosmologie, cette métrique est utilisée pour la description de l'Univers à grandes échelles. La métrique en coordonnées sphériques s'écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} - a^2(t)\sigma^2 d\theta^2 - a^2(t)\sigma^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

où $\sigma = \dfrac{r}{a}$ est une coordonnée sans dimension, tandis que $a(t)$ est homogène à une longueur.

k représente la courbure de l'espace. $k = \{-1; 0; 1\}$. Suivant la valeur de k, l'espace a une géométrie hyperbolique ($k = -1$), la géométrique plate de la relativité restreinte ($k = 0$) et une géométrie sphérique ($k = 1$). On définit $a(t)$ comme un facteur d'échelle qui varie avec le temps.

1. Donner l'expression de tous les éléments $g_{\alpha\beta}$ de cette métrique. En déduire les expressions des $g^{\alpha\beta}$.

2. En relativité générale, il est d'usage d'utiliser des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ qui ont la définition suivante :

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}\left(g_{\gamma\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\gamma} - g_{\alpha\gamma,\sigma}\right)$$

   Déterminer les symboles de Christoffel suivants : $\Gamma_{1}{}^{1}{}_{0}, \Gamma_{0}{}^{1}{}_{1}, \Gamma_{0}{}^{2}{}_{0},\ \Gamma_{2}{}^{1}{}_{0},\ \Gamma_{2}{}^{2}{}_{1}$.

3. *Question subsidiaire* : il existe une formulation isotrope de cette métrique :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1+k\rho^2/4\right)^2}\left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

   Déterminer la relation entre σ et ρ.

[illegible]
[illegible]
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

[illegible]
Correction sommaire

1. [illegible]

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Application : formules d'analyse vectorielle

   1.1 On a : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

   Quel que soit i, on a : $x_i = \mu_{ij} x^j = x^i$

   1.2 Produit scalaire : $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = v^i v_i = v_i v^i = v_i v_i = v^i v^i$

   Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

   $\frac{1}{2} m v^i v_i = \frac{1}{2} m v_i v^i = ... = \Sigma \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d} = \Sigma f^i d_i = \Sigma f_i d^i = ...$

   1.3 $\left(\overrightarrow{grad} f\right)_i = \partial_i f \qquad div \overrightarrow{a} = \partial_i a^i = ...$

   $\Delta f = \partial_i \partial^i f = \partial^i \partial_i f = ... \qquad (\Delta \overrightarrow{a})_i = \partial_j \partial^j a_i = \partial^j \partial_j a_i = ...$

2. Autres systèmes de coordonnées

   Coordonnées cylindriques :

   $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

   Coordonnées sphériques :

   $$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2 d\varphi^2$$

2. [illegible]

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. ${\eta_\mu}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu} = \eta^{\nu\alpha} \eta_{\alpha\mu} = {\eta^\nu}_\mu = \delta^\nu_\mu$

2. $\eta^{\mu\nu} T_{\mu}{}^{\rho\sigma\cdots} \equiv \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\rho\sigma\cdots} = \delta^{\nu}_{\alpha}T^{\alpha\rho\sigma\cdots} = T^{\nu\rho\sigma\cdots}$

3. $A_\alpha = \eta_{\mu\alpha}A^\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$

   $\partial^\mu A_\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu = \partial_\nu\left(\eta^{\mu\nu}A_\mu\right) = \partial_\nu A^\nu = \partial_\mu A^\mu.$

4. $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\partial_0, \overrightarrow{\nabla}\right)$

   $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) = \left(\partial_0, -\overrightarrow{\nabla}\right)$

3. [illegible]

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} - a^2(t)\sigma^2 d\theta^2 - a^2(t)\sigma^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

1. Donner l'expression de tous les éléments $g_{\alpha\beta}$ de cette métrique. En déduire les expressions des $g^{\alpha\beta}$.

   $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{si } \alpha \neq \beta$

   $g_{00} = \dfrac{1}{g^{00}} = 1$

   $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}} = -\dfrac{a^2(t)}{1-k\sigma^2}$

   $g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}} = -a^2(t)\sigma^2$

   $g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}} = -a^2(t)\sigma^2\sin^2\theta$

2. En relativité générale, il est d'usage d'utiliser des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ qui ont la définition suivante :

   $$\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}\left(g_{\gamma\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\gamma} - g_{\alpha\gamma,\sigma}\right)$$

   Déterminer les symboles de Chritoffel suivants : $\Gamma_{1}{}^{1}{}_{0}, \Gamma_{0}{}^{1}{}_{1}, \Gamma_{0}{}^{2}{}_{0},\ \Gamma_{2}{}^{1}{}_{0},\ \Gamma_{2}{}^{2}{}_{1}$.

   $\Gamma_{1}{}^{1}{}_{0} = \Gamma_{0}{}^{1}{}_{1} = \dfrac{1}{2}g^{1\sigma}\left(g_{1\sigma,0} + g_{0\sigma,1} - g_{01,\sigma}\right)$

   $= \dfrac{1}{2}g^{11}g_{11,0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-k\sigma^2}{c\ a^2(t)}\dfrac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-k\sigma^2} = \dfrac{\dot{a}(t)}{c\ a(t)}$

   $\Gamma_{0}{}^{2}{}_{0} = \dfrac{1}{2}g^{2\sigma}\left(g_{0\sigma,0} + g_{0\sigma,0} - g_{00,\sigma}\right) = 0 = \Gamma_{2}{}^{1}{}_{0}$

   $\Gamma_{2}{}^{2}{}_{1} = \dfrac{1}{2}g^{2\sigma}\left(g_{2\sigma,1} + g_{1\sigma,2} - g_{21,\sigma}\right) = \dfrac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \dfrac{2a^2(t)\sigma}{2a^2(t)\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma}$

3. *Question subsidiaire* : il existe une formulation isotrope de cette métrique :

   $$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1+k\rho^2/4\right)^2}\left(d\rho^2 + \rho^2d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

Déterminer la relation entre σ et ρ.

Il faut que : $\dfrac{d\rho}{1 + k\rho^2/4} = \dfrac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}$

Trois solutions suivant les valeurs de k, $\begin{cases} k = -1 & \rho = 2\tanh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\sigma/2\right)\right) \\ k = 0 & \rho = \sigma \\ k = 1 & \rho = 2\tan\left(\arcsin\left(\sigma/2\right)\right) \end{cases}$