Master de Physique 1ère année
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD3 Dynamique relativiste

1. Réaction de désintégration d'un méson

Un méson π^0 de masse m se déplace selon l'axe des x du laboratoire $\mathcal{R}$ à la vitesse βc. Il se désintègre en deux photons. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où le méson est au repos, ces photons sont émis selon une direction faisant un angle θ' avec l'axe x' (qui est commun avec l'axe x).

1. Justifier que le méson ne puisse pas se désintégrer en un seul photon mais qu'il puisse à priori se désintégrer en au moins deux photons.

2. Déterminer l'énergie des photons dans le référentiel du méson.

3. En déduire les énergies et les directions de propagation des deux photons dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle θ'.

2. Autour de l'expérience OPERA (première partie de l'examen décembre 2011)

L'expérience OPERA (Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus, http://operaweb.lngs.infn.it/?lang= consiste en la détection de neutrinos produits par le LHC au CERN (Suisse) dans le tunnel du Gran Sasso (Italie).

Dans l'expérience, les neutrinos sont le produit de la désintégration de particules instables : les pions π^+. Ces pions sont créés par la collision de protons accélérés dans le LHC sur des protons au repos inclus dans une cible de graphite. Ce système a l'avantage de permettre de déterminer précisément l'orientation du faisceau de particules.

Les protons ont une énergie de masse au repos de $E_p = 938$ MeV et l'énergie finale des protons accélérés dans le référentiel $\mathcal{A}$ du laboratoire est de $E_{\mathcal{A}} = 400$ GeV. La collision inélastique d'un proton accéléré avec un proton au repos provoque la création d'un neutron et d'un pion π^+ suivant la réaction :

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^+$$

L'énergie de masse au repos d'un neutron est de $E_n = 940$ MeV et celle du pion chargé positivement est de $E_\pi = 140$ MeV. Le proton cible dans le graphite est considéré au repos dans le référentiel du laboratoire.

1. Exprimer l'énergie cinétique $T_{\mathcal{A}}$ du proton accéléré dans le référentiel $\mathcal{A}$ en fonction des données du problème. Application numérique.

2. Soit q la norme de l'impulsion "observée" du proton accéléré dans $\mathcal{A}$. Déterminer l'expression de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{P}$ du proton accéléré dans ce référentiel en fonction de q, de $T_{\mathcal{A}}$, de E_p et de c, puis l'exprimer en fonction de E_p et de c.

3. Déterminer, en fonction des énergies de masse des particules de la réaction, l'énergie $E_{\min}$ cinétique minimale totale nécessaire aux deux protons pour que la réaction puisse avoir lieu dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{I}$. Application numérique.

4. En déduire l'énergie cinétique $T_{\min}$ minimale du proton accéléré dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{A}$. en fonction de $E_{\min}$ et de E_p. Application numérique. Conclure sur la faisabilité d'une telle réaction dans le cadre de l'expérience.

3. Effet Compton

Un laser fournit un faisceau de photons monochromatiques de longueur d'onde : $\lambda = 266$ nm. Il est dirigé en collision frontale contre un faisceau d'électrons de 30 GeV dans le référentiel $\Re$ du laboratoire. On rappelle que l'énergie au repos d'un électron vaut environ : $0,511$ MeV. D'autre part, on donne la constante de Planck : $h = 6,62\ 10^{-34}$ J.s^{-1}, $c = 3,00.10^{8}$ m.s^{-1} et 1 eV$=$ $1,60.10^{-19}$ J.

1. Calculer l'énergie des photons.

2. Déterminer la vitesse v des électrons dans le référentiel du laboratoire. On pose $\beta = \dfrac{v}{c}$ et $\gamma = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}$. Calculer ces deux quantités. En particulier, on donnera l'écart entre β et 1.

On appelle $\widetilde{P_{e1}}$ et $\widetilde{P_{\gamma 1}}$ les quadrivecteurs énergie-impulsion respectivement de l'électron et du photon avant le choc dans $\Re$. De même, on appelle $\widetilde{P_{e2}}$ et $\widetilde{P_{\gamma 2}}$ ces quadrivecteurs après le choc. On suppose que la direction des faisceaux de photons et d'électrons avant le choc définisse l'axe Ox. On appelle θ l'angle de diffusion des photons après le choc par rapport à l'axe Ox.

On appelle $\Re'$ le référentiel où l'électron est au repos avant la collision avec un photon. L'axe $O'x'$ est défini par la position de l'électron pour l'origine et par la direction d'arrivée du photon pour la direction. Toutes les quantités définies dans $\Re$ ont leur équivalent dans $\Re'$ en ajoutant un $'$ (prime) à leur appellation.

3. Déterminer (en le démontrant) la longueur d'onde du photon après la collision, ainsi que l'énergie associée dans $\Re'$, en fonction de θ' et des données du problème

   Application numérique : calculer ces quantités dans le cas où $\theta' = 0, \dfrac{\pi}{2}$ et π.

4. Déterminer (en le démontrant), l'expression de θ en fontion de θ' et de β.

5. Calculer, pour $\theta' = 0, \dfrac{\pi}{2}$ et π , les valeurs de θ dans le référentiel du laboratoire. Commenter.

Master de Physique 1ère année
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD3 Dynamique relativiste
Correction sommaire

1. Réaction de désintégration d'un méson

1. Dans le référentiel où le méson est au repos avant la désintégration, l'impulsion est nulle. La conservation de l'impulsion impose qu'elle soit nulle après le choc ce qui est impossible avec un seul photon. Il y a donc création d'au moins deux photons.

2. Dans $\Re'$ la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie avant et après la désintégration :

$$\begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar\omega_1'}{c} + \dfrac{\hbar\omega_2'}{c} \\ \dfrac{\hbar\omega_1'}{c}\vec{u_1'} + \dfrac{\hbar\omega_2'}{c}\vec{u_2'} \end{pmatrix}$$

Donc : $\vec{u_1'} = -\vec{u_2'} \qquad \omega_1' = \omega_2' = \omega' = \dfrac{1}{2}\dfrac{mc^2}{\hbar}$

3. On effectue le changement de référentiel en appliquant une transformation de Lorentz au quadrivecteur impulsion-énergie.

Pour le premier photon, on a donc :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\hbar\omega_1}{c} \\ \dfrac{\hbar\omega_1}{c}\cos\theta_1 \\ \dfrac{\hbar\omega_1}{c}\sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar\omega'}{c} \\ \dfrac{\hbar\omega'}{c}\cos\theta' \\ \dfrac{\hbar\omega'}{c}\sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit : $\dfrac{\hbar\omega_1}{c} = \gamma\dfrac{\hbar\omega'}{c}\left(1 + \beta\cos\theta'\right)$

$\hbar\omega_1 = \gamma\dfrac{1}{2}mc^2\left(1 + \beta\cos\theta'\right)$

Et : $\dfrac{\hbar\omega_1}{c}\cos\theta_1 = \gamma\dfrac{\hbar\omega'}{c}\left(\cos\theta' + \beta\right)$

D'où : $\cos\theta_1 = \dfrac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}$

Et pour le photon 2, les relations deviennent :

$\hbar\omega_2 = \dfrac{1}{2}\gamma mc^2\left(1 - \beta\cos\theta'\right) \qquad \cos\theta_2 = \dfrac{-\cos\theta' + \beta}{1 - \beta\cos\theta'}$

2- OPERA

Les protons ont une énergie de masse au repos de $E_p = 938$ MeV et l'énergie finale des protons accélérés dans le référentiel $\mathcal{A}$ du laboratoire est de $E_{\mathcal{A}} = 400$ GeV. La collision inélastique d'un proton accéléré avec un proton au repos provoque la création d'un neutron et d'un pion π^+ suivant la réaction :

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^+$$

L'énergie de masse au repos d'un neutron est de $E_n = 940$ MeV et celle du pion chargé positivement est de $E_\pi = 140$ MeV. Le proton cible dans le graphite est considéré au repos dans le référentiel du laboratoire.

1. $T_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{A}} - E_p = 400000 - 938 = 399\,062$ MeV

2. $\left(\widetilde{P}, \widetilde{P}\right) = \left(\dfrac{E_p + T_{\mathcal{A}}}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\dfrac{E_p}{c}\right)^2$

3. $E_{\min} = E_p + E_n + E_\pi - 2E_p = E_n + E_\pi - E_p = 940 + 140 - 938 = 142.0$ MeV

4. Lorsque l'on se place au seuil de la réaction, l'énergie totale du système des deux protons dans le référentiel du laboratoire: $E = 2E_p + T_{min}$

l'énergie totale du système dans $\Re_I$ s'écrit : $E' = 2E_p + E_{min}$

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion ne dépend pas du référentiel choisi. Comme, par définition, l'impulsion totale du système est nulle dans $\Re_I$, on a :

$$\left(\frac{2E_p + T_{min}}{c}\right)^2 - s^2 = \left(\frac{2E_p + E_{min}}{c}\right)^2$$

avec s norme de l'impulsion correspondant à T_{min} dans le référentiel du laboratoire. En développant cette relation, on obtient :

$$4\frac{E_p T_{min}}{c^2} + \left(\frac{T_{min}}{c}\right)^2 - s^2 = 4\frac{E_p E_{min}}{c^2} + \left(\frac{E_{min}}{c}\right)^2$$

Or, d'après la pseudo-norme de la quadri-impulsion du deuxième proton on a :

$$s^2 = 2\frac{E_p T_{min}}{c^2} + \left(\frac{T_{min}}{c}\right)^2$$

On en déduit que :

$$2\frac{E_p T_{min}}{c^2} = 4\frac{E_p E_{min}}{c^2} + \left(\frac{E_{min}}{c}\right)^2$$

Dans le référentiel du laboratoire, l'énergie cinétique minimale nécessaire pour obtenir la réaction (ou énergie de seuil) vaut :

$$T_{\min} = 2E_{\min} + \frac{E_{\min}^2}{2E_p} = 2 \times 142 + \frac{142^2}{2 \times 938} = 294.75 \text{ MeV}$$

3. Effet Compton

1. $E = \dfrac{6.62\times10^{-34}\times 3\times10^{8}}{266\times10^{-9}} = 7.4662\times10^{-19}\text{J}= \dfrac{7.4662\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}} = 4.66$ eV

2. $\gamma = 58,7\ 10^3,\qquad \beta - 1 = \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{30\times10^3}{0.511}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{30\times10^3}{0.511}\right)^2}} - 1 = -1.4507\times10^{-10}$

Les électrons vont à la vitesse de la lumière à 1.45×10^{-10} près.

3. La conservation de l'énergie-impulsion donne :

$$\widetilde{p'_{e1}} + \widetilde{p'_{\gamma 1}} = \widetilde{p'_{e2}} + \widetilde{p'_{\gamma 2}}$$

$$\begin{pmatrix} m_e c \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{h}{\lambda'} \\ \hbar\overrightarrow{k'_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_e^2c^2 + p'^2_{e2}} \\ \overrightarrow{p'_{e2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{h}{\lambda'_2} \\ \hbar\overrightarrow{k'_2} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$m_e^2c^4 + p'^2_{e2}c^2 = m_e^2c^4 + \left(\dfrac{hc}{\lambda'} - \dfrac{hc}{\lambda'_2}\right)^2 + 2m_ec^2\left(\dfrac{hc}{\lambda'} - \dfrac{hc}{\lambda'_2}\right)$

et : $p'^2_{e2} = \left(\hbar\overrightarrow{k'_1} - \hbar\overrightarrow{k'_2}\right)^2$

On obtient en combinant ces deux égalités :

$\left(\dfrac{hc}{\lambda'}\right)^2 + \left(\dfrac{hc}{\lambda'_2}\right)^2 - 2\dfrac{hc}{\lambda'}\dfrac{hc}{\lambda'_2}\cos\theta' = \left(\dfrac{hc}{\lambda'}\right)^2 + \left(\dfrac{hc}{\lambda'_2}\right)^2 - 2\dfrac{hc}{\lambda'}\dfrac{hc}{\lambda'_2} + 2m_ec^2\left(\dfrac{hc}{\lambda'} - \dfrac{hc}{\lambda'_2}\right)$

Après simplification, on a donc : $\lambda'_2 - \lambda' = \lambda_C(1-\cos\theta')$

avec $\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c} \approx 2\times10^{-12}$ m

L'énergie après le choc s'écrit : $E'_2 = \dfrac{hc}{\lambda'_2} = \dfrac{hc}{\lambda_C(1-\cos\theta') + \lambda'} = E'\dfrac{1}{\dfrac{\lambda_C}{\lambda'}(1-\cos\theta') + 1}$

Par effet Doppler, on a :

$\dfrac{E'}{E} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} = \dfrac{\lambda}{\lambda'}$

Application numérique : calculer ces quantités dans le cas où $\theta' = 0, \dfrac{\pi}{2}$ et π.

$\theta' = 0$

$\lambda'_2 = \lambda' = \left(\sqrt{\frac{1.45}{2}\times10^{-10}}\right)\times 266\times10^{-9} = 2,26\times10^{-12}$ m

$E'_2 = E' = \left(\sqrt{\frac{1.45}{2}\times10^{-10}}\right)^{-1}\times 4.66 = 5,47\times10^5$ eV

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$

$\lambda'_2 = \lambda' + \lambda_C = 2,26\times10^{-12} + 2,43\times10^{-12} = 4,69\times10^{-12}$ m

$E'_2 = E'\dfrac{1}{\dfrac{\lambda_C}{\lambda'} + 1} = 5,47\times10^5\times\dfrac{1}{\dfrac{2,43}{2,26} + 1} = 2,65\times10^5$ eV

$\theta' = \pi$

$\lambda'_2 = \lambda' + 2\lambda_C = 2,26\times10^{-12} + 4,86\times10^{-12} = 7,12\times10^{-12}$ m

$E'_2 = E'\dfrac{1}{2\dfrac{\lambda_C}{\lambda'} + 1} = 5,47\times10^5\times\dfrac{1}{2\dfrac{2,43}{2,26} + 1} = 1,73\times10^5$ eV

4. La démonstration est faite dans le premier exercice et dans le cours :
$\cos\theta = \dfrac{\cos\theta' - \beta}{1 - \beta\cos\theta'}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sin\theta'}{\gamma(1 - \beta\cos\theta')}$

5. Pour $\theta' = 0$ ou π, $\theta = \theta'$. Autrement dit, pour les collisions colinéaires, la direction d'émission des photon est préservée.
Pour $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta = -\beta$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\gamma}$. Comme $\beta \simeq 1$, $\theta \simeq \pi - \dfrac{1}{\gamma} \simeq \pi$. C'est à dire les photons sont émis prèsque vers l'arrièr dans ce cas.