Master de Physique 1ère année et CPES
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD2 Optique relativiste

1. Ombre portée sur un film photographique d'une règle inclinée en mouvement (Contrôle Continu 2010)

Une règle opaque, de longueur ℓ, inclinée d'un angle θ' sur l'axe $O'x'$ du référentiel $\Re'$ auquel elle est liée (référentiel comobile), se déplace avec une vitesse de module $u = \beta c$ parallèle à l'axe Ox du référentiel du laboratoire $\Re$. Un film photographique est déroulé suivant l'axe Ox du référentiel $\Re$. A l'instant t, une impulsion lumineuse (flash) que l'on supposera instantanée est envoyée dans $\Re$ perpendiculairement au film et au-dessus de la règle. On appelle A et B les deux extrémités de la règle. On suppose que la règle est infiniment fine.

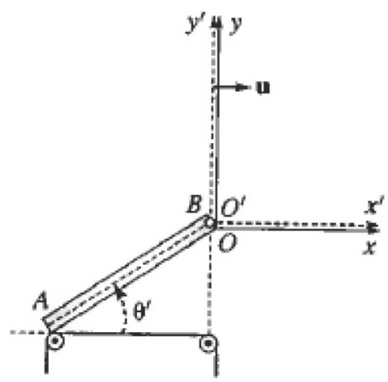


FIGURE 1 – Film photographique

1. On pose : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

   Montrer que la longueur L de film non impressionnée par la lumière a pour expression :

   $$L = \ell \left| -\frac{\cos\theta'}{\gamma} + \beta\ \sin\theta' \right|$$

   Pour cela, on déterminera les coordonnées des événements correspondants aux instants où les photons du flash sont arrêtés par les extrémités A et B de la règle (voir schéma).
2. Décrire ce qui est observé dans les cas où $\theta' = 0$ et $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$
3. Montrer qu'il est possible d'obtenir $L = 0$. Que vaut alors θ' ? Montrer que cette direction correspond à celle de la vitesse des photons dans $\Re'$.

2. Effet Doppler Relativiste. Cas simplifié du survol d'une sonde spatiale

On considère une sonde spatiale S qui survole un laboratoire au sol. Elle émet un rayonnement électromagnétique de fréquence ν_s' pendant la période de visibilité avec le laboratoire. La sonde est animée d'une vitesse $\vec{V}$ par rapport au référentiel du laboratoire sur Terre. Un observateur est placé dans ce référentiel au point O. On repère par le vecteur $\vec{r_0}$ la position relative de la sonde par rapport à l'observateur au moment de l'émission d'un signal au temps t_0. De la même manière, à un instant $t_1 = t_0 + \delta t_s$ plus tard, la sonde émet à nouveau un signal vers la Terre. On définit le vecteur $\vec{r_1}$ la position relative de la sonde par rapport à l'observateur au temps t_1. Enfin, on note θ_0 l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{r_0}$.

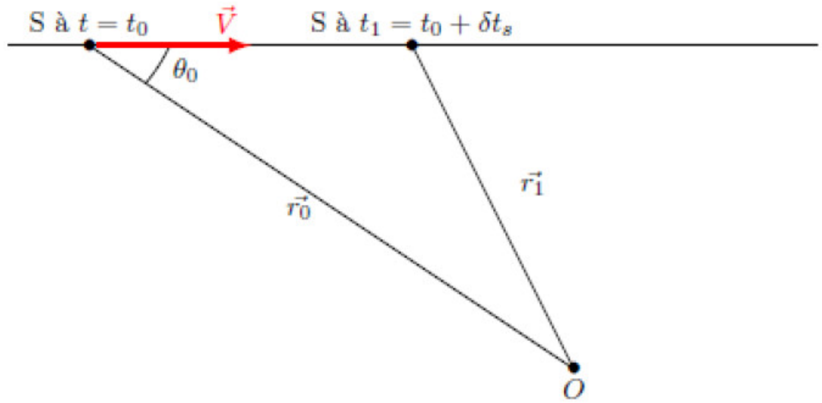


FIGURE 2 – Sonde spatiale S se déplaçant par rapport à un observateur fixe

1. Etude simplifiée de l'effet Doppler non-relativiste

   1.1 Dans le référentiel du laboratoire, exprimer la durée δt_o séparant la réception des deux signaux pour l'observateur en fonction de δt_s, période d'émission de la sonde dans le référentiel de l'observateur.

   1.2 Y-a-t-il un effet Doppler transverse pour $\theta_0 = \pi/2$?

2. Etude simplifiée de l'effet Doppler relativiste

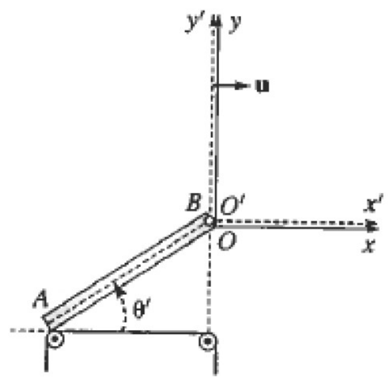
   2.1 Dans quel référentiel l'intervalle de temps séparant deux signaux est un temps propre ?

   2.2 En déduire la fréquence ν_o mesurée par l'observateur en fonction de $\vec{V}$, θ_0 et de la fréquence ν_s' de la sonde.

Master de Physique 1ère année et CPES
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD2 Optique relativiste
correction sommaire

1. Ombre portée sur un film photographique d'une règle inclinée en mouvement

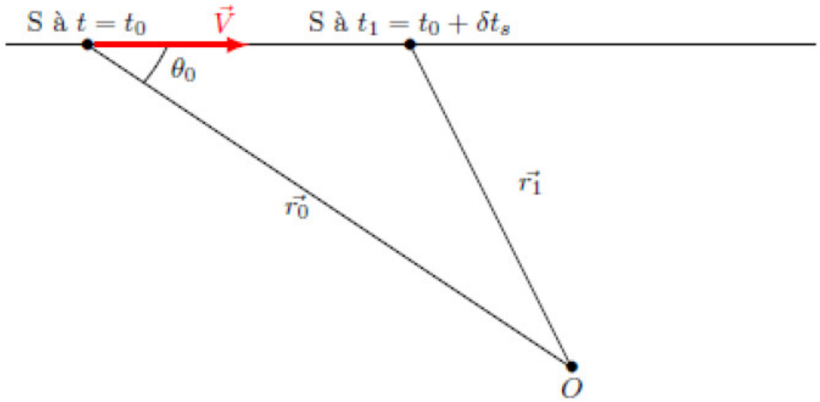


1. On prend comme origine de $\Re$ et de $\Re'$ l'événement correspondant au photon arrêté en B. Soit E l'événement "photon arrêté en A", ses coordonnées dans de $\Re$ et de $\Re'$ sont :
   dans $\Re$ $(ct = -y, x, y, z = 0)$
   dans $\Re'$ $(ct', x' = -\ell\cos\theta', y' = -\ell\sin\theta', z' = 0)$
   Par transformation de Lorentz, on a : $y' = y$ et $x' = \gamma\,(x - \beta ct)$
   $x = \dfrac{x'}{\gamma} + \beta ct = -\dfrac{\ell\cos\theta'}{\gamma} + \ell\sin\theta'$
   $L = \ell\left|-\dfrac{\cos\theta'}{\gamma} + \beta\ \sin\theta'\right|$
2. $\theta' = 0$: La règle est parallèle à l'axe des x et des x'. Il s'agit de la mesure photographique de la longueur de la règle en mouvement dans le laboratoire. C'est une illustration de la contraction des longueurs : $L = \dfrac{\ell}{\gamma}$
   $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$: La règle est normale à la direction de son déplacement. La longueur du film non-impressionné n'est pourtant pas nulle : $L = \beta\ell$. x étant positif, la règle apparaît inclinée d'un angle supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$ pour un observateur du laboratoire.
3. On obtient : $L = 0$ si : $\dfrac{\cos\theta'}{\gamma} = \beta\ \sin\theta'$ soit : $\tan\theta' = \dfrac{1}{\beta\gamma} = \left(\dfrac{1}{\beta^2} - 1\right)^{1/2}$
   Les photons ont une vitesse dans $\Re$ telle que : $\mathbf{v} = (0, v_y = -c, 0)$

La composition des vitesses donne dans $\Re'$: $\mathbf{v}' = \left(v'_x = -u, v'_y = \dfrac{-c}{\gamma}, 0\right)$

La tangente de l'angle correspondant à cette vitesse est : $\tan\alpha' = \dfrac{v'_y}{v'_x} = \tan\theta'$

2. Effet Doppler relativiste



1. Effet Doppler classique

   On a $\delta t_o = \delta t_S + \dfrac{OS'}{c} - \dfrac{OS}{c}$ avec S position de la source à $t = t_0$ et S' position de la source à $t = t_1$.

   avec $\delta t_S = \dfrac{SS'}{V}$, $r_1 = \sqrt{\overrightarrow{OS'}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SS'})^2} = (r_0^2 + V^2\delta t_S^2 - 2r_0 V\delta t_S\cos\theta_0)^{1/2}$

   On s'intéresse à la limite $\delta t_S \to 0$, donc $r_1 - r_0 = -V\delta t_S\cos\theta_0$ Donc $\delta t_o = \delta t_S(1 - \beta\cos\theta)$

   Pour $\theta_0 = \pi/2$, $\delta t_O = \delta t_S$ donc l'effet Doppler classique est nul.

2. Effet Doppler relativiste

   Dans le référentiel en mouvement avec la source, $\delta t'_S$ est un temps propre, relié à la fréquence ν'_S de la source par $\delta t'_S = \dfrac{1}{\nu'_S}$

   La transformation de Lorentz donne $c\delta t'_S = \gamma\, c\delta t_S - \gamma\beta\delta x_S$ avec $\delta x_S = V\delta t_S$

   d'où $\delta t_S = \dfrac{\delta t'_S}{\gamma(1-\beta^2)} = \gamma\delta t'_S$

   On retrouve la dilatation du temps dans le passage de $\Re$ à $\Re'$. Notons qu'on aurait pu retrouver ce résultat par la conservation de l'intervalle, $c^2(\delta t'_S)^2 = c^2\delta t_S^2 - \delta x_S^2$.

   On obtient $\delta t_o = \gamma(1 - \beta\cos\theta_0)\delta t'_S$

   Donc $\nu_o = \dfrac{\nu'_S}{\gamma(1 - \beta\cos\theta_0)}$

   Il y a désormais un effet Doppler transverse (pour $\theta_0 = \pi/2$) : $\nu_o = \nu'_S/\gamma$. Cette correction relativiste de l'effet Doppler est importante pour le GPS.