Master de Physique 1ère année et CPES3
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

TD1 Cinématique relativiste

1. Notion de simultanéité

Soient deux événements E_1 et E_2 décrits par leurs coordonnées spatio-temporelles (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) dans un référentiel $\Re$, d'origine O . Soit un deuxième référentiel $\Re'$, d'origine O', en mouvement rectiligne uniforme de vitesse V par rapport à l'axe (O, x) de $\Re$. On suppose que le problème reste à une dimension spatiale. Notre but est de discuter de la simultanéité (ou non) des événements E_1 et E_2 dans $\Re'$.

1. Représenter les événements E_1 et E_2 dans $\Re$. Retrouver les configurations correspondant aux différents types d'intervalle par rapport à la direction du cône de lumière issu de E_1 dans $\Re$.
2. On suppose que E_1 et E_2 sont simultanés dans $\Re$, ce qui signifie que les coordonnées t_1 et t_2 sont égales. Construire, sur un diagramme de Minskowski, la représentation du référentiel $\Re'$. Déterminer les coordonnées des événements E_1 et E_2 dans $\Re'$. Commenter.
3. Déterminer t_1 et t_2 en supposant que l'on a : $t'_1 = t'_2$
4. On suppose maintenant que E_1 et E_2 ont exactement les mêmes coordonnées dans $\Re$. Conclure sur leurs positions dans $\Re'$.
5. Est-il possible de placer les événements E_1 et E_2 dans $\Re$ de façon à ce que l'ordre chronologique des événements soit inversé entre $\Re$ et $\Re'$?

2. À propos de temps

Une fusée quitte la Terre avec une vitesse v telle que $\beta \equiv v/c = 3/5$. Quand une horloge placée sur la fusée indique qu'une heure s'est écoulée (temps t_0), la fusée envoie un signal lumineux vers la Terre.

1. Pour les horloges terrestres, à quel moment le signal lumineux a-t-il été envoyé ? On appellera ce temps t'_0.
2. Au temps t'_0, l'horloge terrestre envoie aussi un signal lumineux vers la fusée. A quel temps cela correspond-il pour l'horloge de la fusée ? Commenter.
3. Pour les horloges terrestres, combien de temps après le départ de la fusée le signal émis en t_0 a-t-il atteint la Terre ?
4. Pour les horloges de la fusée, combien de temps après le départ de la fusée ce même signal a-t-il atteint la Terre ?

3. Un ver relativiste

Un ver relativiste de longueur propre $100cm$ se déplace vers un étudiant à une vitesse $v = 0.6c$ le long d'une table. Cet étudiant désirant découper ce ver qui l'a tant embêté lors d'un examen de relativité sur les trous de ver, tient deux haches, une dans chaque main avec une distance les séparant de $100cm$. L'étudiant a l'intention de frapper simultanément la table de telle sorte que la hache de sa main gauche arrive immédiatement derrière la queue du ver.

L'étudiant dit : "Le ver se déplace vers moi de sorte que sa longueur va être contractée et donc elle sera inférieure à la distance séparant mes deux haches ce qui aura pour conséquence d'épargner le ver." D'un autre coté le ver dit : "Les deux haches se déplacent vers moi de sorte que la longueur les séparant va être contractée et donc elle sera inférieure à ma taille ce qui aura pour conséquence la décapitation."

On note R le référentiel associé aux coordonnées (ct, x) dans lequel les deux haches sont au repos. La hache de gauche est à l'origine $x_{HG} = 0$ et la hache de droite à la coordonnée $x_{HD} = 100$. On note R' le référentiel associé aux coordonnées (ct', x') dans lequel le ver est au repos. La queue du ver est à $x'_Q = 0$ et sa tête à $x'_T = 100$. On notera L'_V la longueur du ver dans R' et L_V sa longueur dans R. De la même manière on note L_H la longueur séparant les deux haches dans R et L'_H la longueur séparant les deux haches dans R'.

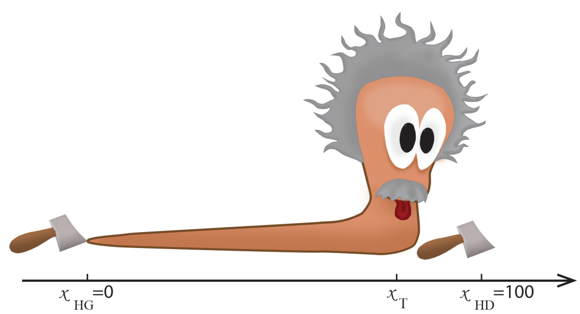


FIGURE 1 – La vue de l'étudiant du problème dans son référentiel R

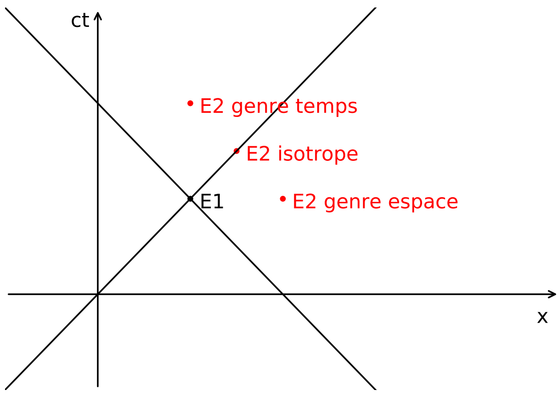
1. Selon l'étudiant, quelle est la longueur du ver ?
2. Selon le ver, quelle est la longueur séparant les deux haches ?
3. Résoudre ce paradoxe apparent en calculant les temps correspondants au moment où les deux haches touchent la table dans le référentiel du ver. Qui a raison ?

Master de Physique 1ère année et CPES3
Relativité et temps
M.-Ch. Angonin, B. Fang et Ch. Le Poncin-Lafitte
2017-2018

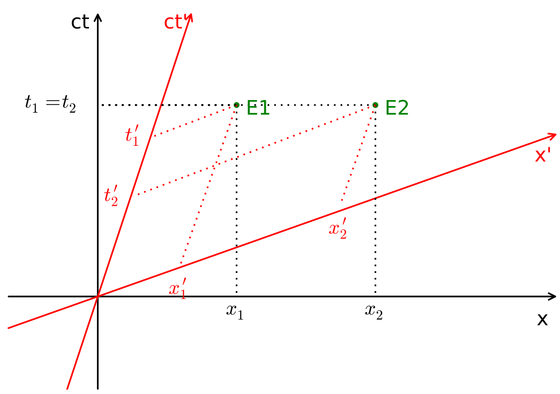
TD1 Cinématique relativiste

Correction sommaire

1. Notion de simultanéité

1. 

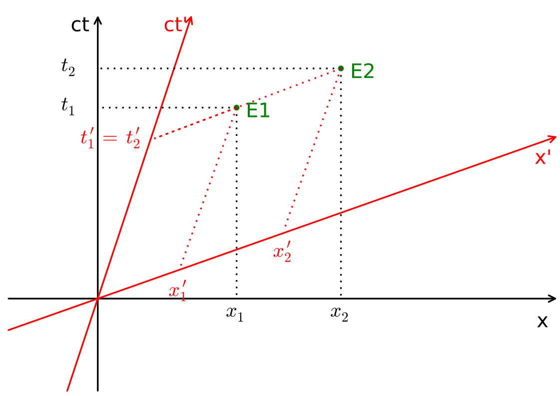
---

2. 

.

Un événement simultané dans un référentiel ne l'est pas forcément dans l'autre.

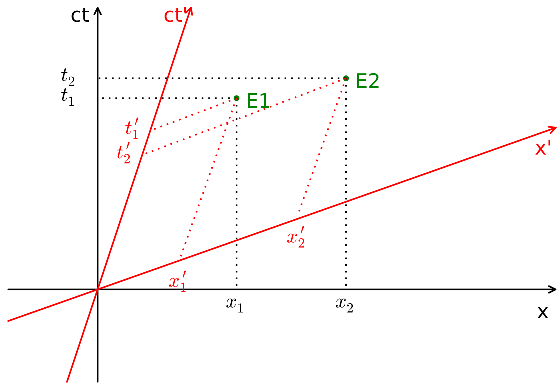
---

3. 

---

4. Quand les deux événements ont des coordonnées identiques dans un référentiel, il s'agit d'un seul et même événement. Les deux événements ont alors des coordonnées identiques quel que soit le référentiel.

---

5. 

   Pour obtenir une telle configuration, il faut que l'intervalle entre les deux événements soit du genre espace : une particule passerait d'un événement à l'autre devrait aller à une vitesse supérieure à celle de la lumière ce qui est impossible, il n'y a pas de lien de causalité entre les deux événements. L'inversion de chronologie entre les deux référentiels n'est donc pas un paradoxe.

2. À propos de temps

On commence par définir les trois événements qui interviennent et par leur associer des temps coordonnées dans le référentiel $\Re'$ de la Terre et $\Re$ de la fusée.

événement A : la fusée quitte la Terre. On choisit $t_A = t'_A = 0$ pour cet événement.

événement O : la fusée émet un flash lumineux. d'après l'énoncé, $t_0 = 1\text{h}$. On cherchera t'_0.

événement B : l'horloge terrestre émet un signal à $t'_B = t'_0$. On cherchera t_B.

événement C : le flash lumineux arrive sur Terre. On ne connaît ni t_C, ni t'_C.

On a $\beta = v/c = 3/5 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \dfrac{5}{4}$

1- $t_0 - t_A = t_0$ est le temps propre de l'horloge de la fusée ($x = \text{cte}$), on a :

$c^2 t_0^2 = c^2 \left(1 - \beta^2\right) \left(t'_0 - t'_A\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \dfrac{t'_0}{\gamma}$

$t'_0 = \gamma t_0 = 1\text{h}15\,\text{min}$

2- En effectuant le même raisonnement en sens inverse on a :

$t_B = \gamma t'_0 = 1\text{h}33\,\text{min}\,45\text{s}$

Ce qui est simultané dans $\Re'$ ne l'est pas dans $\Re$. Cela ne pose pas de problème dans la mesure où l'on ne peut pas simultanément comparer les horloges. Si la fusée fait demi-tour et que les deux horloges se retrouvent côte à côte, on retrouve la configuration des jumeaux : l'horloge terrestre seule est restée dans un référentiel Minkowskien, elle seule donne le temps propre qui est le plus grand.

3- Le flash lumineux doit parcourir la distance vt'_0 dans $\Re'$ (distance d'éloignement de la fusée lorsque le flash est émis), donc

$t'_C = t'_0 + \dfrac{vt'_0}{c} = (1 + \beta)\, t'_0 = 2\text{h}$

4- On propose trois méthodes pour répondre à cette question :

— En raisonnant dans $\Re'$: $t'_C - t'_A$ est un temps propre, donc $t'_C - t'_A = \dfrac{t_C - t_A}{\gamma}$

$t_C = 2\text{h}30\,\text{min}$

— En raisonnant dans $\Re$: le flash lumineux doit parcourir la distance vt_0 plus la distance $v(t_C - t_0)$ correspondant à l'éloignement de la Terre pendant le parcours du flash lumineux dans $\Re$ c'est à dire $t_C = t_0 + \frac{v}{c}t_0 + \frac{v}{c}(t_C - t_0)$. Ainsi $t_C = \frac{1}{1-\beta}t_0 = \frac{5}{2}t_0$ d'où $t_C = 2\text{h}30\,\text{min}$.

— Conservation de l'intervalle $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ entre les événements A et C.

$c^2 t_C'^2 = c^2 t_C^2 - v^2 t_C^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_C = 2\text{h}30\,\text{min}$

3. Le ver relativiste

1. La formule reliant une longueur propre l_0 d'un objet dans le référentiel R' et sa longueur l dans R est donnée par $l = \frac{l_0}{\gamma}$. Comme $\beta = 0.6$ on a donc $\gamma = \frac{5}{4}$. On applique la formule sur l'objet qui est le ver c'est à dire que l'on a : $L_V = \frac{4}{5}L'_V = 80cm$.
2. Même raisonnement sauf que ici il faut se rendre compte que la distance entre les deux haches n'est pas un objet ! La formule établie pour la contraction des longueurs ne veut rien dire ici comme il l'est démontré à la question 3.
3. On pose :

   événement HG : "La hache de gauche touche la table",
   événement HD : "La hache de droite touche la table".

   (a) Dans R :
      i. les coordonnées de l'événement HG sont : $ct_{HG} = 0, x_{HG} = 0$
      ii. les coordonnées de l'événement HD sont : $ct_{HD} = 0, x_{HD} = 100$.

   (b) Dans R' :
      i. les coordonnées de l'événement HG sont : $ct'_{HG} = 0, x'_{HG} = 0$
      ii. les coordonnées de l'événement HD sont : ct'_{HD}, x'_{HD}.

   Afin de déterminer ct'_{HD} et x'_{HD} on va utiliser la transformation de Lorentz entre les référentiels R et R'. On a donc :

$$\begin{aligned} ct'_{HD} &= \gamma(ct_{HD} - \beta x_{HD}), \\ x'_{HD} &= \gamma(x_{HD} - \beta ct_{HD}). \end{aligned}$$

   On obtient donc

$$\begin{aligned} ct'_{HD} &= -2.5\ 10^{-9}s = -2.5ns \\ x'_{HD} &= 125cm. \end{aligned}$$

   On en conclut que les événements HG et HD ne sont pas simultanés dans R'. Le ver est sauvé !