

Chapitre 10

LES PERTURBATIONS DÉPENDANT DU TEMPS

Considérons un système quantique décrit par l'hamiltonien H_0 . Nous appliquons une perturbation connue dépendant du temps, $H_1(t)$.

L'équation d'évolution s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = [H_0 + H_1(t)] |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ est un vecteur dépendant du temps, $|\psi\rangle = |\psi\rangle_t$, dont on connaît la valeur, $|\psi\rangle_{t_0}$, à l'instant initial t_0 . Notre propos est de déterminer $|\psi\rangle_t$, noté $|\psi\rangle$ le plus souvent.

Comme pour les perturbations indépendantes du temps, nous introduisons un paramètre de développement g . Nous posons $H_1 = gH'_1$ et nous résolvons l'équation d'évolution aux divers ordres en g .

10.1 Méthode générale

Les vecteurs propres de H_0 sont notés $|u_n\rangle$. Les valeurs propres de H_0 correspondantes sont notées \mathcal{E}_n . Nous supposons qu'elles sont éventuellement dégénérées; dans ce cas, divers indices n , associés à des vecteurs $|u_n\rangle$ différents, conduisent à des valeurs \mathcal{E}_n identiques.

L'hamiltonien H_0 ne dépend pas du temps, $|u_n\rangle$ et \mathcal{E}_n sont donc indépendants du temps. Ils satisfont les relations $H_0 |u_n\rangle = \mathcal{E}_n |u_n\rangle$.

Nous supposons que la base $|u_n\rangle$ est orthonormée.

L'état $|\psi\rangle$ est connu à l'instant t_0 . On pose

$$|\psi\rangle_{t_0} = \sum_n C_n(t_0) |u_n\rangle$$

où les coefficients $C_n(t_0)$ sont connus.

Soit $|\varphi_n\rangle_t$ la solution de l'équation d'évolution satisfaisant la condition initiale $|\varphi_n\rangle_{t_0} = |u_n\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_n\rangle_t = [H_0 + H_1] |\varphi_n\rangle_t \quad \text{avec} \quad |\varphi_n\rangle_{t_0} = |u_n\rangle$$

On vérifie aisément que $|\psi\rangle_t$, donné par la relation

$$|\psi\rangle_t = \sum_n C_n(t_0) |\varphi_n\rangle_t \tag{10.1}$$

satisfait l'équation d'évolution et la condition initiale imposée. L'équation d'évolution étant une équation du premier ordre, sa solution est unique lorsque les conditions initiales sont fixées, ainsi l'expression 10.1 est elle la solution recherchée.

Le problème considéré est donc résolu lorsqu'on connaît $|\varphi_n\rangle_t$.

10.2 Détermination de $|\varphi_{n_0}\rangle_t$

Ici, n_0 est un indice choisi une fois pour toutes tandis que n, m, k ou ℓ désignent des indices susceptibles de prendre des valeurs arbitraires (sauf mention contraire).

10.2.1 L'opérateur $e^{\alpha H_0}$

La définition de l'opérateur $e^{\alpha H_0}$ où H_0 est un opérateur observable indépendant du temps et α un scalaire complexe fonction du temps, est donnée par son action sur un ket $|\varphi\rangle$, obtenue de la façon suivante :

1. On décompose $|\varphi\rangle$ sur une base de vecteurs propres de H_0 : $|\varphi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$
2. On définit $e^{\alpha H_0} |\varphi\rangle := \sum_n c_n e^{\alpha \mathcal{E}_n} |u_n\rangle$ où \mathcal{E}_n est la valeur propre de H_0 associée à $|u_n\rangle$.

Cette définition permet de démontrer les relations suivantes

$$\begin{aligned} U &= e^{\alpha H_0} \Leftrightarrow U^{-1} = e^{-\alpha H_0}, \quad U^\dagger = e^{\alpha^\dagger H_0} \text{ et} \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} \times H_0 e^{\alpha H_0} = \frac{d\alpha}{dt} \times e^{\alpha H_0} H_0 \\ e^{\alpha H_0} &= 1 + \frac{\alpha}{1!} H_0 + \frac{\alpha^2}{2!} H_0^2 + \frac{\alpha^3}{3!} H_0^3 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} H_0^n + \dots \end{aligned} \quad (10.2)$$

Remarquons que ces propriétés sont, formellement, les propriétés habituelles de la fonction exponentielle. Les relations 10.2 tiennent au fait que H_0 est indépendant du temps.

10.2.2 Changement de représentation

Considérant le cas $\alpha = -i(t - t_0)/\hbar$, nous posons $|\varphi\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |\psi\rangle$. Cette relation définit le ket $|\psi\rangle$; explicitement il vient $|\psi\rangle = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |\varphi\rangle$.

L'équation d'évolution conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi\rangle &= [H_0 + H_1] |\varphi\rangle \Leftrightarrow e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H_1 e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |\psi\rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle &= \tilde{H}_1 |\psi\rangle \text{ avec } \tilde{H}_1 = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_1 e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Afin de déterminer $|\varphi_{n_0}\rangle$, nous nous proposons de déterminer tout d'abord $|\psi_{n_0}\rangle := e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n_0}\rangle$ à chaque instant.

La conditions initiale, à l'instant t_0 , est $|\varphi_{n_0}\rangle_{t_0} = |u_{n_0}\rangle$, c'est-à-dire $|\psi_{n_0}\rangle_{t_0} = e^0 |u_{n_0}\rangle = |u_{n_0}\rangle$.

10.2.3 Développement en puissances de g

Nous posons $\tilde{H}_1 = g\tilde{H}'_1$ et $|\psi_{n_0}\rangle = |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle + \dots + |\psi_k\rangle + \dots$ avec $|\psi_k\rangle = g^k |\psi'_k\rangle$. Dans les deux membres de l'équation d'évolution 10.3, nous identifions alors les termes de même puissance de g :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} (|\psi_0\rangle + g|\psi'_1\rangle + \dots) &= g\tilde{H}'_1 (|\psi_0\rangle + g|\psi'_1\rangle + \dots) \Leftrightarrow \\ g^k i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'_k\rangle &= g^k \tilde{H}'_1 |\psi'_{k-1}\rangle \Leftrightarrow \boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_k\rangle = \tilde{H}_1 |\psi_{k-1}\rangle} \end{aligned} \quad (10.4)$$

La condition initiale s'écrit :

$$(|\psi_0\rangle + g|\psi'_1\rangle + \dots)_{t_0} = |u_{n_0}\rangle$$

En identifiant les termes de même puissance de g dans les deux membres, on trouve

$$\boxed{|\psi_0\rangle_{t_0} = |u_{n_0}\rangle, \quad g^k |\psi'_k\rangle_{t_0} := |\psi_k\rangle_{t_0} = 0 \text{ pour } k \geq 1}$$

La méthode de résolution consiste tout d'abord à déterminer $|\psi_0\rangle$.

Pour $k = 1$, l'équation différentielle 10.4 satisfaite par $|\psi_1\rangle$ s'écrit $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_1\rangle = \tilde{H}_1 |\psi_0\rangle$. C'est une équation différentielle du premier ordre dont le second membre est connu. Elle peut être résolue sans difficulté. La condition initiale $|\psi_1\rangle_{t_0} = 0$ permet de déterminer $|\psi_1\rangle$. Le ket $|\psi_1\rangle$ étant connu, on peut alors déterminer $|\psi_2\rangle$ et de proche en proche tous les $|\psi_k\rangle$ jusqu'à l'ordre requis.

Développée à tous ordres, la relation $|\varphi\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |\psi\rangle$ devient

$$\boxed{|\varphi_k\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |\psi_k\rangle}$$

$|\psi_k\rangle$ étant connu, on détermine alors les corrections, $|\varphi_k\rangle$, de tous ordres.

10.2.4 Ordre zéro : détermination de $|\psi_0\rangle$

L'équation s'écrit $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_0\rangle = 0$ soit, $|\psi_0\rangle = |cte\rangle = |\psi_0\rangle_{t_0}$. Compte tenu de la condition initiale, il vient :

$$|\psi_0\rangle_t = |u_{n_0}\rangle \Leftrightarrow |\varphi_{n_0}\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle + O_1 = e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle + O_1$$

où O_1 est un terme du premier ordre, encore inconnu.

10.2.5 Ordre 1

La perturbation du premier ordre satisfait l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_1\rangle = \tilde{H}_1 |\psi_0\rangle = \tilde{H}_1 |u_{n_0}\rangle$$

où \tilde{H}_1 est une fonction de t .

Le ket $|\psi_1\rangle$ satisfait la condition initiale $|\psi_1\rangle_{t_0} = 0$ ce qui implique

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}_1(t') |u_{n_0}\rangle dt'$$

avec $\tilde{H}_1(t') |u_{n_0}\rangle = e^{iH_0(t'-t_0)/\hbar} H_1 e^{-iH_0(t'-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle$.

En utilisant la définition de l'exponentielle, il vient :

$$H_1 e^{-iH_0(t'-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle = H_1 e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t'-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle.$$

La relation de fermeture fournit alors l'expression

$$H_1 e^{-iH_0(t'-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle = 1 \times H_1 |u_{n_0}\rangle e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t'-t_0)/\hbar} = \sum_m |u_m\rangle \langle u_m | H_1 |u_{n_0}\rangle e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t'-t_0)/\hbar}$$

Pour déterminer $\tilde{H}_1 |u_{n_0}\rangle := \tilde{H}_1(t') |u_{n_0}\rangle$ on utilise encore la définition de $e^{iH_0(t'-t_0)/\hbar} |u_m\rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(t') |u_{n_0}\rangle & : = e^{iH_0(t'-t_0)/\hbar} \left(H_1 e^{-iH_0(t'-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle \right) \\ & = e^{iH_0(t'-t_0)/\hbar} \sum_m |u_m\rangle \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t'-t_0)/\hbar} \\ & = \sum_m e^{i\mathcal{E}_m(t'-t_0)/\hbar} |u_m\rangle \langle u_m | H_1 |u_{n_0}\rangle e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t'-t_0)/\hbar} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_t & : = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}_1(t') |u_{n_0}\rangle dt' \\ & = \frac{1}{i\hbar} \sum_m \int_{t_0}^t |u_m\rangle \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle e^{-i(\mathcal{E}_{n_0} - \mathcal{E}_m)(t' - t_0)/\hbar} dt' \end{aligned}$$

Au premier ordre, il vient donc :

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle & = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |\psi_1\rangle \\ & = \frac{1}{i\hbar} \sum_m \int_{t_0}^t e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} |u_m\rangle \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle e^{-i(\mathcal{E}_{n_0} - \mathcal{E}_m)(t' - t_0)/\hbar} dt' \\ & = \frac{1}{i\hbar} \sum_m \int_{t_0}^t e^{-i\mathcal{E}_m(t-t_0)/\hbar} |u_m\rangle \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle e^{-i(\mathcal{E}_{n_0} - \mathcal{E}_m)(t' - t_0)/\hbar} dt' \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_0}\rangle & = |\varphi_0\rangle + |\varphi_1\rangle + O_2 \\ & = e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle + \sum_m C_m |u_m\rangle + O_2 \quad \text{avec} \quad (10.5) \\ C_m & = +\frac{1}{i\hbar} e^{-i\mathcal{E}_m(t-t_0)/\hbar} \int_{t_0}^t e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})(t' - t_0)/\hbar} \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle dt' \end{aligned}$$

La même méthode se poursuit jusqu'à l'ordre requis.

Remarquons que les termes du premier ordre présentent une composante suivant $|u_{n_0}\rangle$ que nous notons $C_{n_0} |u_{n_0}\rangle = \varepsilon_1 e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle$ où $\varepsilon_1 = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \langle u_{n_0} | H_1(t') |u_{n_0}\rangle dt'$. La relation 10.5 s'écrit :

$$|\varphi_{n_0}\rangle = (1 + \varepsilon_1) e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle + \sum_{m \neq n_0} C_m |u_m\rangle + O_2$$

Au même ordre d'approximation, il vient :

$$|\varphi_{n_0}\rangle = (1 + \varepsilon_1) \left(e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar} |u_{n_0}\rangle + \sum_{m \neq n_0} C_m |u_m\rangle \right) + O'_2$$

En négligeant encore des termes du second ordre on pose $1 + \varepsilon_1 = e^{\varepsilon_1} + O_2$. Nous mettons en facteur le terme $e^{-i\mathcal{E}_{n_0}(t-t_0)/\hbar}$. Il vient :

$$\boxed{|\varphi_{n_0}\rangle = e^{-i\theta_{n_0}} \left\{ |u_{n_0}\rangle + \sum_{m \neq n_0} e^{-i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})(t-t_0)/\hbar} K_m |u_m\rangle \right\} + O''_2} \quad (10.6)$$

avec

$$\begin{aligned} K_m & = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})(t' - t_0)/\hbar} \langle u_m | H_1(t') |u_{n_0}\rangle dt' \quad \text{et} \\ \theta_{n_0} & = \frac{1}{\hbar} \left(\mathcal{E}_{n_0} (t - t_0) + \int_{t_0}^t \langle u_{n_0} | H_1(t') |u_{n_0}\rangle dt' \right) \end{aligned}$$

Remarquons que θ_{n_0} est réel.

Nous utiliserons cette expression pour étudier les opérations de branchement.

Remarque : Ici, c'est la méthode qu'il convient de retenir et d'employer le cas échéant. Bien souvent, cependant, il est possible de simplifier le problème posé et de trouver le résultat cherché de façon plus rapide.

Retenons cependant le résultat suivant qui se déduit de la théorie de la mesure et des relations 10.5 ci-dessus : «La perturbation $H_1(t)$ est susceptible de provoquer des transitions $|u_{n_0}\rangle \mapsto |u_m\rangle$ ssi $\langle u_{n_0}|H_1(t)|u_m\rangle \neq 0$. Les transitions pour lesquelles $\langle u_{n_0}|H_1(t)|u_m\rangle = 0$ sont appelées "transitions interdites"» Ces transitions sont "interdites" dans le cadre de la théorie des perturbations du premier ordre ; le plus souvent elles ne sont que très rares.

10.3 Exemple d'une perturbation périodique

Considérons le cas d'un système à deux niveaux non dégénérés : $|u_n\rangle = |a\rangle$ ou $|b\rangle$ avec $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_a$ ou \mathcal{E}_b . Nous supposons $\mathcal{E}_a < \mathcal{E}_b$.

Nous supposons que $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ forme une base orthonormée de l'espace des états. L'hamiltonien non perturbé est donc :

$$H_0 = \mathcal{E}_a |a\rangle\langle a| + \mathcal{E}_b |b\rangle\langle b|.$$

Nous considérons une perturbation périodique :

$$H_1 = [|a\rangle V_{ab} \langle b| + |b\rangle V_{ba} \langle a|] \sin \omega t$$

où $V_{ab}^\dagger = V_{ba}$ est un nombre complexe constant tandis que ω est une constante positive.

L'hamiltonien H_0 est par exemple l'hamiltonien d'un atome dont les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ forment une base de l'espace des états accessibles, tandis que la perturbation H_1 est produite par l'action d'une onde électromagnétique sur l'atome.

A l'instant $t_0 = 0$, le système est dans l'état $|\psi\rangle_0 = |a\rangle$. Posons :

$$|\psi\rangle_t = \Lambda_a e^{-i\mathcal{E}_a t/\hbar} |a\rangle + \Lambda_b e^{-i\mathcal{E}_b t/\hbar} |b\rangle$$

L'équation d'évolution fournit les équations satisfaites par Λ_a et Λ_b :

$$i\hbar \frac{d\Lambda_a}{dt} = V_{ab} \sin \omega t e^{-i\omega_0 t} \Lambda_b, \quad i\hbar \frac{d\Lambda_b}{dt} = V_{ba} \sin \omega t e^{i\omega_0 t} \Lambda_a \quad (10.7)$$

où $\omega_0 = (\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a)/\hbar$. Nous imaginons les termes perturbatifs V_{ab} et V_{ba} sous la forme gV'_{ab} et gV'_{ba} et sans l'écrire explicitement, nous considérons que Λ_a et Λ_b se développent suivant les puissances de g .

En négligeant la perturbation ($V_{ab} = 0 = V_{ba}$, soit $H = H_0$), compte tenu de la condition initiale, il vient $\Lambda_a = 1$ et $\Lambda_b = 0$. Cela signifie que Λ_b est un terme d'ordre O_1 lorsqu'on tient compte de la perturbation, tandis que $\Lambda_a = 1 + f$ où f est également d'ordre O_1 .

Au second ordre près les équations 10.7 s'écrivent donc sous la forme :

$$i\hbar \frac{d\Lambda_a}{dt} = 0, \quad i\hbar \frac{d\Lambda_b}{dt} = V_{ba} \sin \omega t e^{i\omega_0 t}$$

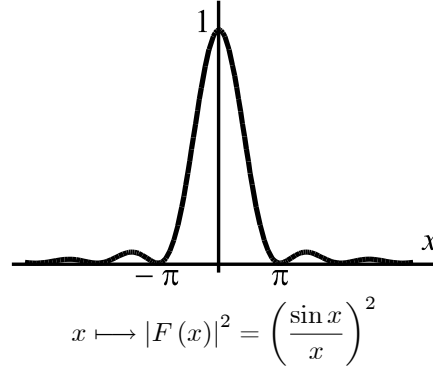
Compte tenu des conditions initiales, on trouve

$$|\psi\rangle_t = e^{-i\mathcal{E}_a t/\hbar} |a\rangle - \frac{V_{ba}}{2i\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} - \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right) e^{-i\mathcal{E}_b t/\hbar} |b\rangle + O_2$$

La probabilité de trouver (lors d'une mesure) le système dans l'état $|b\rangle$ est $P_{a \rightarrow b} = \frac{|\Lambda_b|^2}{|\Lambda_a|^2 + |\Lambda_b|^2}$. A l'ordre le plus bas où $P_{a \rightarrow b}$ est non nul, on trouve :

$$P_{a \rightarrow b} = \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} - \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right|^2 + O_3$$

Pour étudier le comportement de $P_{a \rightarrow b}$, nous posons $F(x) := \frac{e^{2ix} - 1}{2ix}$. Nous calculons $|F(x)|^2 = \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2$ (fonction de diffraction) dont nous représentons le graphe ci-après.



Il vient :

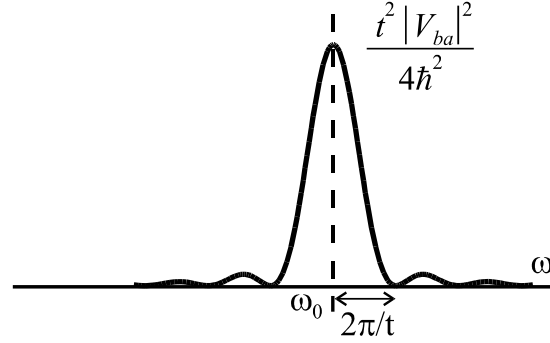
$$P_{a \rightarrow b} = t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} |F_{(\omega_0 + \omega)t/2} - F_{(\omega_0 - \omega)t/2}|^2$$

Considérons le cas $t \gg 2\pi/\omega_0$. Dans ces conditions $(\omega_0 + \omega)t/2 \gg \pi$ car ω et ω_0 sont positifs. On en déduit que $|F_{(\omega_0 + \omega)t/2}|$ est négligeable devant l'unité alors que dans les mêmes conditions, $|F_{(\omega_0 - \omega)t/2}|$ n'est pas nécessairement négligeable. Il vient :

$$P_{a \rightarrow b} \simeq t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} |F_{(\omega_0 - \omega)t/2}|^2 = t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} \left(\frac{\sin((\omega_0 - \omega)t/2)}{(\omega_0 - \omega)t/2} \right)^2 \quad (10.8)$$

L'atome présente une évolution périodique de période $T = \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|}$. La période devient très grande lorsque $\omega \rightarrow \omega_0$.

Le graphe ci-dessous représente la probabilité de transition en fonction de la pulsation ω de la perturbation.



$\omega \mapsto P_{a \rightarrow b}$, après un temps d'interaction t ,
donné.

La perturbation provoquera des transitions $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ si sa fréquence, $\frac{\omega}{2\pi}$ est voisine de la fréquence de transition $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (i.e. $|\omega_0 - \omega| \lesssim 2\pi/t$); en effet, c'est dans ce cas que $P_{a \rightarrow b}$ est voisin de sa valeur maximale, $t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2}$.

Avec $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ correspondant aux transitions optiques et $t \gtrsim \tau = 20 \text{ ns}$ par exemple, la probabilité $P_{a \rightarrow b}$ tombe à moins de 5% de sa valeur maximale, pour $|\omega_0 - \omega| > 10^{-7} \omega_0 \simeq 2\pi/\tau$ et à moins de 0,1% de sa valeur maximale pour $|\omega_0 - \omega| > 10^{-6} \omega_0 \simeq 10 \times 2\pi/\tau$.

Dans ces conditions, l'erreur absolue commise en utilisant l'approximation 10.8 n'excède pas $3 \cdot 10^{-8} t^2 \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2}$; elle est négligeable.

Ainsi (pour $t \gg 2\pi/\omega_0$) les transitions $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ se produisent seulement lorsque la pulsation de la perturbation est voisine de la pulsation de transition : $\omega \simeq \omega_0$.

Cependant, le cadre de la théorie des perturbations limitée au premier ordre suppose la relation $P_{a \rightarrow b} \ll 1$, c'est à dire $t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} \ll 1$. La relation $t \gg 2\pi/\omega_0$ est donc incompatible avec les présents développements lorsque $|V_{ba}| \gg \hbar\omega_0/\pi$.

Rappelons la propriété déjà mentionnée : $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right)^2 = t \cdot \pi \delta(\Omega)$ (voir la section "Présentation du cours"). Appliquons cette propriété à l'expression 10.8. Lorsque $t \rightarrow \infty$ (i.e. $t \gg 2\pi/\omega_0$ avec $|V_{ba}| \ll \hbar\omega_0/\pi$) on trouve :

$$P_{a \rightarrow b} = t^2 \times \frac{|V_{ba}|^2}{4\hbar^2} |F_{(\omega_0 - \omega)t/2}|^2 \simeq t \times \pi \frac{|V_{ba}|^2}{2\hbar^2} \delta(\omega - \omega_0)$$

On met ainsi en évidence une probabilité de transition par unité de temps, $W_{a \rightarrow b}$:

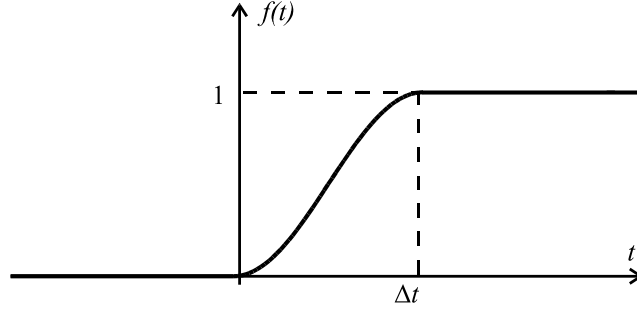
$$W_{a \rightarrow b} = \pi \frac{|V_{ba}|^2}{2\hbar^2} \delta(\omega - \omega_0)$$

Nous ne chercherons pas à donner, ici, une interprétation de l'expression obtenue. Nous voulons seulement mettre en évidence la notion de probabilité par unité de temps et souligner que c'est une notion est très utile. Dans la théorie du laser, par exemple, la fonction généralisée $\delta(\omega - \omega_0)$ qui apparaît ici, sera remplacée par une "vraie" fonction dont les propriétés caractérisent le milieu amplificateur. Cette même notion de probabilité par unité de temps est également utilisée ci-dessous dans l'expression de la règle d'or de Fermi.

10.4 Branchement d'une perturbation stationnaire

"Brancher une perturbation", c'est appliquer une perturbation dépendant du temps $H_1(t)$, telle que $H_1 = 0$ pour $t < 0$ et $H_1 = h$, constant, pour $t > \Delta t$. Le temps nécessaire au branchement est Δt .

Nous supposons que l'hamiltonien h est une perturbation de H_0 et nous posons par exemple $H_1(t) = f(t) \times h$ où $f(t)$ est une fonction monotone croissant de 0 à 1 (cf. ci-dessous).



Allure de la fonction de branchement, $f(t)$.

Avec une fonction de branchement semblable à la fonction représentée ci-dessus, il vient $\frac{df}{dt} \sim \frac{1}{\Delta t}$.

Pendant le branchement, le système est soumis à une perturbation dépendant du temps. Avec $t_0 = 0$, l'expression 10.6 s'écrit :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_0}\rangle &= e^{-i\theta_{n_0}} \left\{ |u_{n_0}\rangle + e^{-i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})t/\hbar} \sum_{m \neq n_0} K_m |u_m\rangle \right\} + O_2' \text{ avec} \\ K_m &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})t'/\hbar} \langle u_m | H_1(t') | u_{n_0} \rangle dt' \text{ et} \\ \theta_{n_0} &= \frac{1}{\hbar} \left(\mathcal{E}_{n_0} t + \int_0^t \langle u_{n_0} | H_1(t') | u_{n_0} \rangle dt' \right) \end{aligned}$$

Nous supposons (pour simplifier) que les valeurs propres \mathcal{E}_n ne sont pas dégénérées. Dans ces conditions, la relation $m \neq n$ implique $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n \neq 0$. En intégrant par partie, il vient :

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})t'/\hbar}}{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})/\hbar} \langle u_m | H_1(t') | u_{n_0} \rangle \right]_0^t \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \frac{e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})t'/\hbar}}{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})/\hbar} \frac{d}{dt'} \langle u_m | H_1(t') | u_{n_0} \rangle dt' \end{aligned} \quad (10.9)$$

10.4.1 Branchement adiabatique

On suppose ici que H_1 varie très lentement. Plus précisément on admet les relations $\frac{df}{dt} \sim \frac{1}{\Delta t}$ et $|\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n| \Delta t \gg \hbar$. Dans ces conditions le second terme de l'expression

10.9 est négligeable :

$$K_m(t) \simeq -\frac{e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0})t/\hbar}}{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{n_0}} \langle u_m | H_1(t) | u_{n_0} \rangle \text{ pour } m \neq n_0$$

On en déduit l'expression de $|\varphi_{n_0}\rangle$ à l'instant t :

$$|\varphi_{n_0}\rangle = e^{-i\theta_{n_0}} \left(|u_{n_0}\rangle + \sum_{m \neq n_0} |u_m\rangle \frac{\langle u_m | H_1(t) | u_{n_0} \rangle}{\mathcal{E}_{n_0} - \mathcal{E}_m} \right)$$

On vérifie que dans ces conditions $|\varphi_{n_0}\rangle$ est, à chaque instant t , un vecteur propre de $H_0 + H_1(t)$ pour la valeur propre $E_n(t) = \mathcal{E}_n + \langle u_n | H_1(t) | u_n \rangle$ (voir l'expression 8.7 du paragraphe 8.3).

10.4.2 Branchement soudain

On suppose ici que Δt est très bref : plus précisément $|\mathcal{E}_k| \Delta t \ll \hbar$, ce qui implique aussi $|\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n| \Delta t \ll \hbar$. Dans ces conditions, lors du branchement (i.e. $0 \leq t \leq \Delta t$), il vient $e^{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)t/\hbar} \simeq 1$. L'expression 10.9, valable pour $m \neq n_0$, devient (en effectuant le changement de notation $n_0 \rightarrow n$) :

$$K_m = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\langle u_m | H_1(t') | u_n \rangle}{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)/\hbar} \right]_0^t - \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \frac{1}{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)/\hbar} \frac{d}{dt'} \langle u_m | H_1(t') | u_n \rangle dt'$$

On en déduit $K_m = 0$ pendant le branchement. De même, les conditions imposées impliquent $|\theta_n| = \frac{1}{\hbar} \left| \mathcal{E}_n t + \int_0^t \langle u_n | H_1(t') | u_n \rangle dt' \right| \ll 1$ car, pendant le branchement, il vient $|\mathcal{E}_k| t \leq |\mathcal{E}_k| \Delta t \ll \hbar$. De plus, H_1 étant une perturbation, on suppose la relation $|\langle u_n | H_1(t') | u_n \rangle| < |\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k|$ (cf. le paragraphe 8.3).

Par conséquent, $e^{-i\theta_n} = 1$ et $|\varphi_n\rangle = |u_n\rangle$, pendant le branchement.

A l'instant $t = 0$, l'état du système est $|\psi\rangle_0 = \sum_n C_n |u_n\rangle$, où les coefficients C_n sont des constantes. A l'instant t , pour $0 \leq t \leq \Delta t$, l'état du système est $|\psi\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle$ avec $|\varphi_n\rangle \simeq |u_n\rangle$. L'état du système n'est donc pas modifié lors d'un branchement soudain.

Considérons à titre d'exemple le cas d'une perturbation branchée de façon soudaine à l'instant $t = 0$ et débranchée dans les mêmes conditions à l'instant τ . Initialement l'énergie du système est \mathcal{E}_n . Sans perturbation, elle resterait \mathcal{E}_n . La perturbation qui agit pendant la durée τ modifie le spectre de l'énergie. Nous voulons savoir quelles sont les valeurs possibles de l'énergie et leur probabilité lors d'une mesure effectuée après que la perturbation soit débranchée.

Aux instants $t \leq 0$ ou $t > \tau$, l'hamiltonien du système est H_0 . Nous admettons que ses énergies \mathcal{E}_k ne sont pas dégénérées et admettent $|u_k\rangle$ pour vecteurs propres, la base formée par les kets $|u_k\rangle$ étant orthonormée.

A l'instant $t = 0$ la perturbation est branchée de façon soudaine. L'hamiltonien est alors $H = H_0 + h$ pendant toute la durée de la perturbation. La perturbation h est indépendante du temps. Les énergies propres associées à l'hamiltonien H ainsi que les vecteurs propres sont données par la théorie des perturbations stationnaires (cf.8.3). Les énergies propres sont $E_n = \mathcal{E}_n + \langle u_n | h | u_n \rangle + O_2$ et les vecteurs propres $|v_n\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2$. Dans le cadre de la théorie des perturbations du premier

ordre que nous considérons ici, cette dernière relation s'inverse sous diverses formes :

$$\begin{aligned} |u_n\rangle &= |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} |v_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2 = |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} |v_k\rangle \frac{\langle v_k | h | v_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2 \\ &= |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} |v_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{E_n - E_k} + O_2 = |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} |v_k\rangle \frac{\langle v_k | h | v_n \rangle}{E_n - E_k} + O_2 \end{aligned}$$

Considérons le cas où, initialement ($t \leq 0$), le système est dans l'état $|\psi\rangle_t = e^{-i\mathcal{E}_n t/\hbar} |u_n\rangle$. C'est un état propre de l'énergie qui évolue sous l'effet de l'hamiltonien H_0 .

A l'instant $t = 0$, avant le branchement, l'état est $|\psi\rangle_0 = |u_n\rangle$; après le branchement, l'état est encore $|\psi\rangle_0 = |u_n\rangle = |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} |v_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k}$, car il n'est pas modifié par un branchement soudain.

L'état, soumis à l'hamiltonien $H_0 + h$, évolue alors. Pour $0 \leq t \leq \tau$, il vient

$$|\psi\rangle_t = e^{-iE_n t/\hbar} |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} e^{-iE_k t/\hbar} |v_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k}$$

A l'instant τ , lorsque la perturbation est débranchée, l'état est :

$$|\psi\rangle_\tau = e^{-iE_n \tau/\hbar} |v_n\rangle - \sum_{k \neq n} e^{-iE_k \tau/\hbar} |v_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k}$$

Le débranchement étant soudain, l'état n'est pas modifié. On décompose $|\psi\rangle_\tau$ sur la base des états propres de H_0 afin de déterminer l'évolution ultérieure, sous l'effet de l'hamiltonien H_0 :

$$|\psi\rangle_\tau = e^{-iE_n \tau/\hbar} \left(|u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} \right) - \sum_{k \neq n} e^{-iE_k \tau/\hbar} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2$$

Aux instants $t \geq \tau$, le système est donc dans l'état :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_t &= e^{-iE_n \tau/\hbar} \left(e^{-i\mathcal{E}_n(t-\tau)/\hbar} |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} e^{-i\mathcal{E}_k(t-\tau)/\hbar} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} \right) \\ &\quad - \sum_{k \neq n} e^{-iE_k \tau/\hbar} e^{-i\mathcal{E}_k(t-\tau)/\hbar} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2 \\ &= e^{-i(E_n - \mathcal{E}_n)\tau/\hbar} e^{-i\mathcal{E}_n t/\hbar} |u_n\rangle \\ &\quad + \sum_{k \neq n} e^{i\mathcal{E}_k \tau/\hbar} \left(e^{-iE_n \tau/\hbar} - e^{-iE_k \tau/\hbar} \right) e^{-i\mathcal{E}_k t/\hbar} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | h | u_n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k} + O_2 \end{aligned}$$

On effectue une mesure de l'énergie à l'instant $t \geq \tau$.

Remarquons que $\langle \psi | \psi \rangle_t = 1 + O_2$. La probabilité de trouver \mathcal{E}_ℓ avec $\ell \neq n$ est donc :

$$P_{n \rightarrow \ell} = |\langle u_\ell | h | u_n \rangle|^2 \left| \frac{e^{-iE_n \tau/\hbar} - e^{-iE_\ell \tau/\hbar}}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell} \right|^2 + O_3$$

avec $e^{-iE_k \tau/\hbar} = e^{-i\mathcal{E}_k \tau/\hbar} + O_1$. On en déduit

$$\begin{aligned}
P_{n \rightarrow \ell} &= |\langle u_\ell | h | u_n \rangle|^2 \left| \frac{e^{-i\mathcal{E}_n \tau / \hbar} - e^{-i\mathcal{E}_\ell \tau / \hbar}}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell} \right|^2 + O'_3 \\
&= 4 \frac{|\langle u_\ell | h | u_n \rangle|^2}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell)^2} \sin^2 \left(\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell}{2\hbar} \tau \right) + O'_3 \quad (10.10)
\end{aligned}$$

Le résultat ne dépend pas de t , ce que l'on attendait car l'énergie est une grandeur conservative.

10.5 Evolution vers un continuum d'énergie

Premier exemple : Considérons un atome à plusieurs électrons dont le centre de masse est immobile. Le spectre de l'énergie est discret. Par contre, si on considère le même système physique dans un état ionisé, le spectre correspondant est continu car l'énergie cinétique des diverses particules est arbitraire, sous réserve qu'elle soit positive.

Certains atomes excités sont susceptibles de se désexciter en éjectant un électron (effet Auger). Ils passent donc du domaine des énergies discrètes au domaine des énergies continues.

Pour comprendre que ce phénomène ne viole pas la conservation de l'énergie, considérons le cas simple d'un atome d'hélium, même si ce sont des atomes de nombre atomique plus élevé qui sont généralement concernés par l'effet Auger. Nous supposons que le noyau de l'atome reste immobile (la masse du noyau étant très supérieure à celle des électrons nous assimilons donc la position du noyau et celle du centre de masse).

Si on ne tient compte que de l'interaction entre les électrons et le noyau, l'énergie est $E_{n_1, n_2} = -4E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$ où n_1 et n_2 sont des entiers, caractéristiques de l'état électronique, tandis que $E_0 \simeq 13,6 \text{ eV}$ est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène. Dans une telle approximation, les états propres de l'énergie sont stables. On sait cependant que les atomes excités ne restent généralement pas excités et retournent vers un état fondamental de plus basse énergie en émettant des photons (processus radiatif). L'effet Auger, pour sa part est un processus non radiatif dû aux interactions entre électrons.

Considérons un état initial excité $n_1 = 2, n_2 = 2$. L'énergie correspondante est $-27,2 \text{ eV}$. Considérons le même système dans un état final ionisé où un électron forme avec le noyau un ion He^+ d'énergie minimale $-4E_0 = -54,4 \text{ eV}$ tandis que l'autre électron, très éloigné de He^+ , ne possède que son énergie cinétique E_c . La conservation de l'énergie implique $-27,2 \text{ eV} = -54,4 \text{ eV} + E_c$, soit $E_c = 27,2 \text{ eV} > 0$. Une telle réaction n'est donc pas exclue *a priori*. Des réactions d'autoionisation de ce type sont effectivement observées.

L'hamiltonien de couplage entre les électrons d'un atome excité est donc susceptible de provoquer des transitions du domaine des énergies discrètes vers le domaine des énergies continues.

Second exemple : Considérons une particule de masse m (à une dimension), piégée dans un puits de potentiel pratiquement infini de largeur a . Le spectre des énergies est \mathcal{E}_k , avec $\mathcal{E}_k = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} k^2 := \mathcal{E}_0 k^2$ (où k est un entier). L'un des bords du puits laisse passer une faible proportion de particules dans un puits beaucoup plus grand dont le spectre d'énergie est $\mathcal{E}_n = E_0 n^2$ avec $E_0 \ll \mathcal{E}_0$. On peut alors considérer que les énergies \mathcal{E}_n (très proches les unes des autres) constituent un continuum. Dans un tel système les états $|u_k\rangle$ d'énergies discrètes \mathcal{E}_k sont couplés à un continuum d'énergie \mathcal{E} dont les vecteurs de base sont notés $|u(\mathcal{E})\rangle$. Brancher l'interaction, c'est rendre la paroi un peu transparente ;

débrancher l'interaction, c'est rendre la paroi totalement réfléchissante. Lorsque l'interaction est débranchée, le spectre des énergies comprend donc une composante discrète et une composante continue.

Soit dn le nombre d'états du continuum dont l'énergie est comprise entre \mathcal{E} et $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$. On écrit $dn = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$ où $\rho(\mathcal{E})$ est appelé "densité des états". La relation $n = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{E_0}}$ conduit, ici, à l'expressions $\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E} E_0}}$.

Probabilité de transition, "règle d'or de Fermi" : Nous poursuivons en gardant présent à l'esprit le second exemple ci-dessus. Le spectre d'énergie présente une composante discrète et une composante continue. L'espace des états admet pour base les kets correspondants $\{|u_n\rangle, |u(\mathcal{E})\rangle\}$, états propres de l'énergie.

Supposons que l'interaction soit branchée en permanence. A l'instant t , on sonde la petite cavité et on constate que le système est dans l'état $|u_k\rangle$. On peut considérer que l'interaction n'avait pas été branchée avant l'instant t , ou encore qu'elle a été branchée de façon soudaine à l'instant t , immédiatement après, ou avant l'observation (car un tel branchement ne modifie pas l'état). A l'instant $t + \tau$, on sonde la grande cavité. Le résultat de l'observation ne dépend pas de ce qui se passera après. On peut donc considérer que l'interaction est débranchée de façon soudaine, immédiatement après l'observation ou encore immédiatement avant. Pour étudier l'évolution du système on peut donc considérer que l'interaction est branchée à l'instant t et débranchée à l'instant $t + \tau$ de façon soudaine.

Les résultats du paragraphe précédents 10.4.2 (expression 10.10), donnent la probabilité de trouver le système dans l'état $|u(\mathcal{E})\rangle$ avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\ell$:

$$P_{n \rightarrow \ell} = 4 \frac{|\langle u_\ell | h | u_n \rangle|^2}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell)^2} \sin^2 \left(\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_\ell}{2\hbar} \tau \right) \quad (10.11)$$

Dans cette expression, \mathcal{E}_n est une valeur de l'énergie appartenant au spectre discret, tandis que \mathcal{E}_ℓ appartient au spectre continu.

Le système étant à l'instant t dans l'état d'énergie \mathcal{E}_n , la probabilité de trouver, à l'instant $t + \tau$, son énergie dans le domaine continu, comprise entre \mathcal{E} et $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ est donc :

$$dP = 4 \frac{|\langle u(\mathcal{E}) | h | u_n \rangle|^2}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E})^2} \sin^2 \left(\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}}{2\hbar} \tau \right) \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

La présence du terme $\frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2\hbar} (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}) \tau \right)}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E})^2}$ dans l'expression de dP implique qu'aucune transition n'est possible, lorsque $\tau \rightarrow \infty$, sauf pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$. Cette propriété exprime la conservation de l'énergie.

La probabilité pour que l'énergie du système appartienne au continuum est donc

$$P_{n \rightarrow \{\mathcal{E}\}} = \int_{\{\mathcal{E}\}} 4 \frac{|\langle u(\mathcal{E}) | h | u_n \rangle|^2}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E})^2} \sin^2 \left(\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}}{2\hbar} \tau \right) \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

Considérons une intégrale de la forme $\int g(\Omega) \frac{\sin^2 \Omega \tau}{\Omega^2} d\Omega$. Lorsque τ est assez grand pour que $g(\Omega)$ varie peu dans l'intervalle $\Omega \in \left[-\frac{2\pi}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau} \right]$, on peut effectuer la substitution $\frac{\sin^2 \Omega \tau}{\Omega^2} \rightarrow \pi \tau \delta(\Omega)$ pour le calcul de l'intégrale. Dans ces conditions on

trouve : $P_{n \rightarrow \{ \}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle u(\mathcal{E}_n) | h | u_n \rangle|^2 \rho(\mathcal{E}_n) \times \tau := W \tau$. La quantité W est la probabilité de transition par unité de temps de l'état $|u_n\rangle$ vers l'état du continuum de même énergie.

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle u(\mathcal{E}_n) | h | u_n \rangle|^2 \rho(\mathcal{E}_n)$$

Cette formule, établie ici dans le cas où les énergies ne sont pas dégénérées, est connue sous le nom de "règle d'or de Fermi". Elle montre l'existence d'une probabilité de transition par unité de temps, W , indépendante du temps, qui caractérise l'évolution vers un état du continuum d'énergie.

Ce résultat très important est très général. Il a de multiples applications.

Lois de décroissance exponentielle Nous pouvons maintenant établir la nature exponentielle de la loi qui régit la radioactivité, la désexcitation des atomes, l'évolution du nombre de particules piégées dans une cavité présentant des pertes ainsi que tous les phénomènes de même nature.

Le système quantique considéré peut être fort complexe. Par exemple, quand une radiation est émise dans une désintégration, il faut inclure dans le système étudié le champ quantifié de la radiation. Les hamiltoniens de couplage entre les états du spectre discret et ceux du spectre continu peuvent être très différents les uns des autres suivant les cas considérés. Le seul résultat dont nous avons besoin pour établir la nature exponentielle de la loi d'évolution est l'existence d'une probabilité de transition indépendante du temps.

Soit $N(t)$ le nombre de systèmes dans l'état $|u_k\rangle$ à l'instant t . La proportion de systèmes qui évolue vers le continuum pendant dt est égale (selon la loi des grands nombres valable pour $N \gg 1$) à la probabilité de transition $W dt$ (plus précisément cette proportion est presque certainement voisine de $W dt$). Ainsi $\frac{-dN}{N} = W dt$. La probabilité par unité de temps étant constante, on en déduit $N(t) = N(t_0) e^{-W(t-t_0)}$.

La quantité $1/W$ est le temps moyen nécessaire pour que se désintègre un noyau ou que se désexcite un atome, suivant le cas considéré. L'état final est atteint après une durée de l'ordre de $1/W$ qui présente une incertitude, Δt , du même ordre. La quatrième inégalité de Heisenberg permet, ici, d'estimer la dispersion des énergies dans l'état final : $\Delta \mathcal{E} \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta \mathcal{E} \sim \hbar/W$. En étudiant précisément l'évolution d'une population nombreuse de systèmes identiques, tous dans le même état initial $|u_n\rangle$ du spectre discret, on montre que l'état $|u_n\rangle$ se dépeuple tandis que se peuplent les états du continuum distribués sur une largeur de l'ordre de \hbar/W au voisinage de l'énergie initiale.