Master de sciences et technologie.

Mécanique quantique appliquée (MU003)

Juin 2007

Examen (Session 2bis)

durée 2h

Les documents et les calculatrices sont interdits

Applications immédiates du cours

Les questions qui suivent peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

L'espace des états admet pour base orthonormalisée les 3 kets $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$. On considère les quatre observables $A = M(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| - |c\rangle\langle c|)$, $B = J(i\ |a\rangle\langle b| - i\ |b\rangle\langle a|)$, $C = L(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|)$, $H = E(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + 3|c\rangle\langle c|)$ où M, J, L et E sont des réels non nuls. L'observable H est l'hamiltonien du système.

Dans la deuxième question et les questions suivantes, on considère, en outre, le ket $|\psi\rangle$:
$|\psi\rangle = |a\rangle + i|b\rangle + (1+i)|c\rangle$.

1- Donner les valeurs propres des opérateurs A, B, C et H et les vecteurs propres associés .

On considère les couples d'opérateurs $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, H\}$, $\{B, C\}$ et $\{B, H\}$. Donner pour chaque couple, lorsqu'elle existe, une base de vecteurs propres communs aux deux opérateurs.

Préciser quels sont les commutateurs nuls dans la liste suivante : $[A, B]$, $[A, C]$, $[A, H]$, $[B, C]$ et $[B, H]$.

Préciser s'il est nécessaire de compléter les listes suivantes pour former des ensembles complets, minimaux, d'observables qui commutent : 1^{er} ECOC : $\{A,\ ...\}$, $2^{ème}$ ECOC : $\{B,\ ...\}$. Le cas échéant, compléter la liste par des opérateurs choisi parmi $\{A, B, C, H\}$

2- Calculer $\langle\psi|\psi\rangle$, $|\phi\rangle = B|\psi\rangle$, $\langle\phi|\phi\rangle$ et $\langle\psi|\phi\rangle$. Calculer, sur l'état $|\psi\rangle$, la valeur moyenne, $\langle B\rangle$ et l'écart quadratique, ΔB, de la mesure de B.

N.B. On pourra tout d'abord exprimer $\langle B\rangle$ et $(\Delta B)^2$ en fonction de $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\phi|\psi\rangle$ et $\langle\phi|\phi\rangle$.

3- On effectue une mesure de H sur l'état $|\psi\rangle$. Quels sont les résultats possibles, leur probabilité. Donner dans chaque cas l'état du système immédiatement après la mesure.

4- Une observable admet pour vecteurs propres le vecteur $|u\rangle = 2|b\rangle + (1+i)|c\rangle$ et deux autres vecteurs orthogonaux à $|u\rangle$. On effectue la mesure correspondante sur l'état $|\psi\rangle$. Quelle est la probabilité pour que le système se retrouve dans l'état $|u\rangle$, immédiatement après la mesure.

5- A l'instant $t_0 = 0$, le système est décrit par le ket $|\psi\rangle$. Donner un ket qui décrive l'état du système à l'instant t.

Montrer que le système se retrouve dans le même état physique que l'état initial après un temps d'évolution T dont on donnera la valeur minimale.

Problème

Le potassium a le numéro atomique $Z = 19$. Dans l'état fondamental les moments cinétiques électroniques sont caractérisés par les nombres quantiques $S = 1/2$ pour le spin total et $L = 0$ pour le moment orbital total.

Le noyau de potassium, ${}^{39}_{19}K$ présente un spin nucléaire caractérisé par le nombre quantique $I = 3/2$.

Dans tout le problème, L, S et I restent constants.

I- Magnétisme atomique du potassium

1- Donner la valeur du nombre quantique J, associé au moment électronique total de l'ensemble des électrons, ainsi que la notation spectroscopique correspondante.

Rappeler la valeur, g_S, du facteur de Landé associé au spin électronique ainsi que la valeur du facteur de Landé g_L associé au moment orbital électronique.

Calculer la valeur numérique du facteur de Landé électronique, g_e

On donne la valeur du facteur de Landé nucléaire du potassium : $g_N \simeq 0,4$ ainsi que le rapport m_e/m_P de la masse de l'électron à la masse du proton : $m_e/m_P \simeq 5,4 \times 10^{-4}$.

Comparer les moment magnétiques d'origine électronique et d'origine nucléaire.

2- Une base de l'espace des états est donnée par l'ensemble des vecteurs notés $|n, L, S, J; m_J\rangle\, |I; m_I\rangle$ où $|n, L, S, J; m_J\rangle$ est la base standard de l'espace des états électroniques tandis que $|I; m_I\rangle$ est la base standard de l'espace des états du proton (supposé immobile).

En première approximation nous négligeons la contribution du spin nucléaire à l'hamiltonien du système. Le vecteur $|n, L, S, J; m_J\rangle\, |I; m_I\rangle$ est alors un vecteur propre de l'hamiltonien qui satisfait la relation : $H\, |n, L, S, J; m_J\rangle\, |I; m_I\rangle = E_{n,L,S,J;m_J}\, |n, L, S, J; m_J\rangle\, |I; m_I\rangle$. On suppose qu'à l'instar de L, S et J, le nombre quantique n reste constant dans tout le problème ($n = 4$); par conséquent, l'énergie $E_{n,L,S,J;m_J}$ ne peut dépendre que de m_J; on admet cependant qu'il n'en est rien : $E_{n,L,S,J;m_J} = E_0$.

Rappeler ce qu'est la base standard et ce que représentent respectivement L, S, J et m_J pour les vecteurs de la base standard.

Donner les valeurs susceptibles d'être prises par m_J et m_I. En déduire la dimension de l'espace des états considérés ainsi que la dégénérescence de l'énergie E_0.

3- On néglige ici le magnétisme d'origine nucléaire. Immergé dans un champ magnétique faible, $B = \left\|\vec{B}\right\|$, l'énergie de l'atome de potassium subit une petite modification ΔE_B

Démontrer la relation $\Delta E_B \simeq K\ B$ (effet Zeeman) où K est une constante susceptible de prendre deux valeurs dont on donnera l'expression et la valeur numérique en $\mathrm{eV\,T^{-1}}$.

Montrer que les dégénérescences de l'énergie sont partiellement levées.

II- Structure hyperfine du potassium

On considère, en l'absence de champ magnétique, le couplage des moments magnétiques électronique et nucléaires. Ce couplage engendre une perturbation de l'hamiltonien $\Delta H = A\ \left(\vec{I} \cdot \vec{J}\right)$ où $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont respectivement les moments cinétiques d'origine nucléaire et électronique tandis que A est, ici, une constante.

Le moment cinétique total est $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$.

1- Rappeler que les valeurs propres de $\vec{F}^2$ s'expriment en fonction d'un nombre quantique F. Donner leur expression en fonction de F et préciser les valeurs possibles de F dans le cas du potassium considéré.

2- Démontrer qu'à chaque valeur de F correspond un niveau d'énergie : $E_F = E_0 + \Delta E_F$.

Exprimer, en fonction de A, pour chacune des valeurs de F, la perturbation de l'énergie, ΔE_F.

Donner l'ordre de dégénérescence des niveaux d'énergie pour chaque valeur de F.

3- Soient F_1 et F_2 les deux plus petites valeurs possibles de F. On pose $\delta E = |\Delta E_{F_1} - \Delta E_{F_2}|$. La fréquence de la transition $\nu = \dfrac{\delta E}{2\pi\hbar}$ est mesurée ; on trouve $\nu \simeq 462\,\mathrm{MHz}$. En déduire la valeur de la constante $A\hbar$.

∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘

On donne la valeur du magnéton de Bohr : $|\mu_B| = \dfrac{e\hbar}{2m_e} \simeq 9,3 \times 10^{-24}\,\mathrm{J\,T^{-1}}$

On rappelle, sans autres explications, l'expression de g :

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{g_1 - g_2}{2} \times \frac{J_1\,(J_1 + 1) - J_2\,(J_2 + 1)}{J\,(J + 1)}$$

Master de sciences et technologie.

Mécanique quantique appliquée (MU003)

Juin 2007

Examen (Session 2bis)

corrigé

Applications immédiates du cours

L'espace des états admet pour base orthonormalisée les 3 kets $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$. On considère les quatre observables $A = M(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| - |c\rangle\langle c|)$, $B = J(i\ |a\rangle\langle b| - i\ |b\rangle\langle a|)$, $C = L(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|)$, $H = E(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + 2|c\rangle\langle c|)$ où M, J et E sont des réels. L'observable H est l'hamiltonien du système.

1-

A		B		C		H	
Val ppre	Vr ppre	Val ppre	Vr ppre	Val ppre	Vr ppre	Val ppre	Vr ppre
M	$\|a\rangle$	J	$\|a\rangle - i\|b\rangle$	L	$\|a\rangle$	E	$\|a\rangle$
M	$\|b\rangle$	$-J$	$\|a\rangle + i\|b\rangle$	$-L$	$\|b\rangle$	E	$\|b\rangle$
$-M$	$\|c\rangle$	0	$\|c\rangle$	L	$\|c\rangle$	$3E$	$\|c\rangle$

Dans les tableaux ci-dessous la première ligne représente le couple d'opérateurs considérés, la seconde ligne donne, quand elle existe, une liste de vecteurs propres communs qui forment une base de l'espace des états, la troisième ligne donne les couples de valeurs propres associés à chaque vecteur propre.

$\{A,B\}$		
$\|a\rangle - i\|b\rangle$	$\|a\rangle + i\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{M,J\}$	$\{M,-J\}$	$\{-M,0\}$

$\{A,C\}$		
$\|a\rangle$	$\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{M,L\}$	$\{M,-L\}$	$\{-M,L\}$

$\{A,H\}$		
$\|a\rangle$	$\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{M,E\}$	$\{M,E\}$	$\{-M,3E\}$

Remarquons que pour $\{A,H\}$ la liste donnée n'est pas unique. Les deux premiers vecteurs peuvent être remplacés par deux combinaisons linéaires indépendantes, mais sans cela arbitraires, de $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

$\{B,C\}$
pas de base de vecteurs propres communs

$\{B,H\}$		
$\|a\rangle - i\|b\rangle$	$\|a\rangle + i\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{J,E\}$	$\{-J,E\}$	$\{0,3E\}$

Les opérateurs A et B admettent une base de vecteurs propres communs ils commutent donc : $\boxed{[A,B]=0}$, de même il vient $\boxed{[A,C]=0}$, $\boxed{[A,H]=0}$, $\boxed{[B,C]\neq 0}$ et $\boxed{[B,H]=0}$.
$\boxed{1^{er}\ \text{ECOC} : \{A,\ C\}}$, $\boxed{2^{\grave{e}me}\ \text{ECOC} : \{B\}}$.

2- Mesure de B sur l'état $|\psi\rangle = |a\rangle + i|b\rangle + (1+i)|c\rangle$.
$\boxed{\langle\psi|\psi\rangle = 4}$, $\boxed{|\phi\rangle = B|\psi\rangle = -J(|a\rangle + i|b\rangle)}$ $\boxed{\langle\phi|\phi\rangle = 2J^2}$ et $\boxed{\langle\psi|\phi\rangle = -2J}$

$\langle B\rangle = \dfrac{\langle\psi|B|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{-2J}{4}$ soit $\boxed{\langle B\rangle = \dfrac{-J}{2}}$ $(\Delta B)^2 = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2$ avec $\langle B^2\rangle = \dfrac{\langle\psi|B^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{\langle\phi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{2J^2}{4}$

d'où $(\Delta B)^2 = \dfrac{2J^2}{4} - \dfrac{J^2}{4} = \dfrac{J^2}{4}$ on en déduit $\boxed{\Delta B = \dfrac{|J|}{2}}$

3- Mesure de H sur l'état $|\psi\rangle$

Résultat	$\|\psi_+\rangle$	Probabilité
E	$\|a\rangle + i\,\|b\rangle$	$\frac{1}{2}$
$2E$	$(1+i)\,\|c\rangle$	$\frac{1}{2}$

N.B. Probabilité $= \dfrac{\langle\psi\,|\psi_+\rangle\,\langle\psi_+\,|\psi\rangle}{\langle\psi\,|\psi\rangle\;\langle\psi_+\,|\psi_+\rangle}$

4- $|u\rangle = 2\,|b\rangle + (1+i)\,|c\rangle$

Proba $_{\{\;|\psi_+\rangle=|u\rangle\;\}} = \dfrac{|\langle\psi\,|u\rangle|^2}{\langle\psi\,|\psi\rangle\,\langle u\,|u\rangle} = \dfrac{|-2i+2|^2}{4\times 6} = \dfrac{8}{24}$ d'où $\boxed{\text{Proba}_{\{\;|\psi_+\rangle=|u\rangle\;\}} = \frac{1}{3}}$

5- A l'instant $t_0 = 0$, le système est décrit par le ket $|\psi\rangle$. Donner un ket qui décrive l'état du système à l'instant t.
$|\psi\rangle_t = e^{-iEt/\hbar}\,|a\rangle + ie^{-iEt/\hbar}\,|b\rangle + (1+i)\,e^{-3iEt/\hbar}\,|c\rangle = e^{-iEt/\hbar}\left(\,|a\rangle + i\,|b\rangle + (1+i)\,e^{-i2Et/\hbar}\,|c\rangle\,\right)$. Le même état est représenté également par $\lambda\,|\psi\rangle_t$, c'est à dire, en posant $\lambda = e^{iEt/\hbar}$, par $|a\rangle + i\,|b\rangle + (1+i)\,e^{-2iEt/\hbar}\,|c\rangle$ qui présente la période $\boxed{T = \frac{\pi\hbar}{E}}$

Problème

Le potassium a le numéro atomique $Z = 19$. Dans l'état fondamental les moments cinétiques électroniques sont caractérisés par les nombres quantiques $S = 1/2$ pour le spin total et $L = 0$ pour le moment orbital total.

Le noyau de potassium, ${}^{39}_{19}K$ présente un spin nucléaire caractérisé par le nombre quantique $I = 3/2$.

Dans tout le problème, L, S et I restent constants.

I- Magnétisme atomique du potassium

1- Ici, $|L+S| = \frac{1}{2} = |L-S|$ la valeur de J est donc $\boxed{J = \frac{1}{2}}$. La notation spectroscopique est $\boxed{{}^2S_{1/2}}$

$\boxed{g_L = 1}$ et $\boxed{g_S = 2}$

$g_e = \dfrac{2+1}{2} + \dfrac{2-1}{2} \times \dfrac{3/4 - 0}{3/4} = 2$ soit $\boxed{g_e = g_S = 2}$

$|\mu_e| = g_e \dfrac{e}{2m_e} m_J\,\hbar = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ tandis que $|\mu_N| = g_N \dfrac{e}{2m_P} m_I\,\hbar \lesssim 0,4 \dfrac{e}{2m_P} \times \dfrac{3}{2}\hbar$ d'où

$\dfrac{|\mu_N|}{|\mu_e|} \lesssim 0,6 \dfrac{m_e}{m_P} \simeq 3,2\times 10^{-4}$ soit $\boxed{\frac{|\mu_N|}{|\mu_e|} \lesssim 3,2\times 10^{-4} << 1}$

2- La base standard est formée de vecteurs propres de $\vec{L}^2, \vec{S}^2, \vec{J}^2$ et J_z, projection de $\vec{J}$ sur l'axe Oz :

$\vec{L}^2\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$=$	$\hbar^2 L\,(L+1)\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$L\in\mathbb{N}$
$\vec{S}^2\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$=$	$\hbar^2 S\,(S+1)\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$2S\in\mathbb{N}$
$\vec{J}^2\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$=$	$\hbar^2 J\,(J+1)\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$2S\in\mathbb{N}$
$J_z\,\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$=$	$m_J\,\hbar\;\|n,L,S,J;m_J\rangle$	$m_J = -J\;,\quad -J+1\;,\quad -J+2\;,\;\ldots\;,\;J-1\;,\quad J$

$\boxed{m_J = \pm\frac{1}{2}}$ et $\boxed{m_I = \pm\frac{3}{2}\text{ ou }\pm\frac{1}{2}}$

La dimension de l'espace, d, est aussi l'ordre de dégénérescence de E_0 : $d = 2\times 4$ soit $\boxed{d = 8}$

3- $\Delta E_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -g_e \dfrac{q_e}{2m_e} m_J \times \hbar \cdot B$ avec $m_J = \pm\dfrac{1}{2}$ d'où $\Delta E_B = K \cdot B$

avec $\boxed{K = \pm\dfrac{e}{2m_e} \times \hbar = \pm 5,8 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV\,T^{-1}}}$

La dégénérescence est partiellement levée. La dégénérescence correspondant aux diverses valeurs de m_I subsiste : $d = 8 \rightarrow \boxed{d = 4}$

II- Structure hyperfine du potassium

Le couplage des moments magnétiques électronique et nucléaires engendre une perturbation de l'hamiltonien $\Delta H = A\left(\vec{I}\cdot\vec{J}\right)$ où $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont respectivement les moments cinétiques d'origine nucléaire et électronique tandis que A est, ici, une constante.

Le moment cinétique total est $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$.

1- <u>Valeurs propres de $\vec{F}^2 = \hbar^2 F\,(F+1)$</u> avec $F = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}$ soit $\boxed{F = 1 \text{ ou } 2}$

2- Démontrer qu'à chaque valeur de F correspond un niveau d'énergie : $E_F = E_0 + \Delta E_F$

$\vec{I}\cdot\vec{J} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{F}^2 - \vec{J}^2 - \vec{I}^2\right)$ d'où $\Delta E_F = \dfrac{A\hbar^2}{2}\left(F\,(F+1) - J\,(J+1) - I\,(I+1)\right)$

- $I = \dfrac{3}{2}$, $J = \dfrac{1}{2}$, $F = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta E_1 = -\dfrac{7}{4}A\hbar^2}$ avec $m_F = -1, 0, 1$ d'où la dégénérescence $\boxed{d_1 = 3}$
- $I = \dfrac{3}{2}$, $J = \dfrac{1}{2}$, $F = 2 \Rightarrow \boxed{\Delta E_2 = -\dfrac{5}{4}A\hbar^2}$ avec $m_F = -2, -1, 0, 1, 2$ d'où la dégénérescence $\boxed{d_2 = 5}$

3- $\delta E = \left|\Delta E_{F_1} - \Delta E_{F_2}\right| = \dfrac{1}{2}A\hbar^2$ d'où $\nu = \dfrac{\delta E}{2\pi\hbar} = \dfrac{A\hbar}{4\pi}$ soit $A\hbar = 4\pi\,\nu \Rightarrow \boxed{A\hbar = 5,8 \times 10^{9}\,\mathrm{s^{-1}}}$