Exercices de physique quantique TD3

III- Opérateurs linéaires et Observables

A- Opérateurs linéaires

Exercice 1

Admettons que $\{|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle\}$ est une base orthonormée de l'espace des états. On considère l'opérateur linéaire, A, défini par les relations : $A|\mathbf{u_1}\rangle = (1+i)|\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle - |\mathbf{u_3}\rangle$, $A|\mathbf{u_2}\rangle = |\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle$, $A|\mathbf{u_3}\rangle = 2|\mathbf{u_1}\rangle - 3|\mathbf{u_3}\rangle$.
Donner la représentation matricielle de A dans les deux cas suivants.

1a- Les vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ (dans cet ordre) sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans cet ordre).

1b- Les vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ (dans cet ordre) sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans cet ordre).

Exercice 2

Dans le contexte de l'exercice précédent, avec la représentation **1a-**, un opérateur linéaire, A, est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On pose $|\psi\rangle = |\mathbf{u_1}\rangle + i|\mathbf{u_2}\rangle + 2|\mathbf{u_3}\rangle$. Exprimer, en fonction de $|\mathbf{u_k}\rangle$, le vecteur $A|\psi\rangle$.

Exercice 3

Les vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ d'une base orthonormée sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3a- Chacune des matrices ci-dessous représentent un opérateur. Donner les matrices représentant leurs adjoints.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & i \\ 1+i & 2 & 1 \\ 0 & 1+i & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ 1 & 1 & 7i \\ i & 7/i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i+1 \\ -i & 2+i & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2i+1 \\ 1 & 1 & \dfrac{13}{2+3i} \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les matrices qui représentent un opérateur hermitique ?

3b- Lorsque c'est possible, compléter les matrices suivantes pour qu'elles représentent un opérateur hermitique.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ ? & 2 & ? \\ ? & 1+i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ ? & 1+i & 0 \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ ? & -4 & e^{i\theta} \\ ? & ? & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 4

L'espace des états admet pour base orthonormée l'ensemble des deux vecteurs $\{|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle\}$. Ceux-ci sont respectivement représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des opérateurs représentés par les matrices
$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Parmi ces matrices quelles sont celles qui représentent un opérateur hermitique ?

Exercice 5

$|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ sont deux vecteurs propres d'un même opérateur hermitique pour les valeurs propres différentes, a et b.

5a- Comparer les produits scalaires $\langle\psi\, |A\psi\rangle$ et $\langle A\psi\, |\psi\rangle$.
En remplaçant $A\,|\psi\rangle$ par sa valeur en fonction de a et $|\psi\rangle$, démontrer la relation $a = \overline{a}$ où $\overline{a}$ est le conjugué complexe de a.

5b- Comparer $\langle\varphi\, |A\psi\rangle$ et $\langle A\varphi\, |\psi\rangle$. En utilisant les relations $\overline{b} = b$ et $b \neq a$ démontrer que $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 6

A est un opérateur linéaire qui agit sur l'espace des états, $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}_a$ l'ensemble des vecteurs propres de A qui admettet la même valeur propre, a.
Démontrer que $\mathcal{E}_a$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
N.B. $\mathcal{E}_a$ est appelé sous espace propre ; la dimension de $\mathcal{E}_a$ est l'ordre de dégénérescence de a. Lorsque la dimension de $\mathcal{E}_a$ est égale à l'unité on dit que "a n'est pas dégénérée".

B- Observables et mesure

Exercice 1

L'ensemble des vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ constitue une base orthonormée de l'espace des états. Pris dans cet ordre, les vecteurs sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans cet ordre).
Soient deux observables A et B représentées par les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B} = b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A et B et les vecteurs propres correspondants sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Vecteurs propres	Valeurs propres
A	$\lvert\mathbf{v}_1\rangle = (\lvert\mathbf{u}_1\rangle + \lvert\mathbf{u}_2\rangle)/\sqrt{2}$	a
	$\lvert\mathbf{v}_2\rangle = (\lvert\mathbf{u}_1\rangle - \lvert\mathbf{u}_2\rangle)/\sqrt{2}$	$-a$
	$\lvert\mathbf{v}_3\rangle = \lvert\mathbf{u}_3\rangle$	a
B	$\lvert\mathbf{u}_1\rangle$	b
	$\lvert\mathbf{u}_2\rangle$	$2b$
	$\lvert\mathbf{u}_3\rangle$	$3b$

1a- Vérifier que $\{|\mathbf{v}_k\rangle\}$ forme une base orthonormée.
Donner l'ordre de dégénérescence des diverses valeurs propres de A et de B.
Donner les valeurs propres de l'opérateur identité I (tel que $\mathrm{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ pour tout $|\psi\rangle$) ainsi que leur ordre de dégénérescence.

1b- On considère l'état $|\psi\rangle = |\mathbf{u}_1\rangle + (1+i)\,|\mathbf{u}_2\rangle + i\,|\mathbf{u}_3\rangle$.
On effectue successivement la mesure associée à A, puis, immédiatement après, la mesure associée à B. Préciser à chaque stade les résultats possibles et leur probabilité.

1c- Répondre aux mêmes questions lorsqu'on inverse l'ordre des mesures (B d'abord puis, immédiatement après, A).

1d- Les résultats de ces deux opérations sont ils les mêmes ?
Calculer le commutateur $\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]$.
Quels sont les résultats de ces deux opérations pour $|\psi\rangle = |\mathbf{u}_3\rangle$.

Exercice 2

Dans l'expérience de Stern et Gerlach, on mesure le spin d'un atome d'argent (en réalité on mesure son moment magnétique qui lui est proportionnel). La projection du spin suivant l'axe Oz est l'observable S_z.
L'étude expérimentale montre que dans la mesure de S_z, deux valeurs non dégénérées sont observées : $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$. A chacune de ces valeurs correspond un vecteur propre : $\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle$ à $\frac{\hbar}{2}$ et $\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$ à $-\frac{\hbar}{2}$. Ces vecteurs reçoivent la représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2a- Démontrer que $\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle$ et $\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$ sont orthogonaux. Montrer que la base $\left\{\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle, \left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right\}$ peut être choisie orthonormée (ce que l'on suppose dans la suite de l'exercice).
Quel est le produit scalaire des vecteurs représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$.
Calculer la norme de $a\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + b\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$ où a et b sont des nombres complexes arbitraires.

2b- Montrer que la représentation matricielle de S_z, avec les conventions posées, est nécessairement $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la représentation étant choisie une fois pour toutes, par mesure de simplification on ne distingue plus l'opérateur et sa représentation matricielle).

2c- On démontre que la mesure du spin suivant l'axe Ox est une observable S_x dont la représentation matricielle est $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sans calculs, en utilisant l'isotropie de l'espace, donner les résultats possible d'une mesure de S_x.
Vérifier que $\left|\mathbf{v}_{(+)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + \left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right)$ et $\mathbf{v}_{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle - \left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right)$ sont des vecteurs propres de S_x pour les valeurs propres respectives $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$.

2d- L'état initial est $|\psi\rangle = \left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + (1+i)\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$.
Quels sont les résultats possibles d'une mesure de S_z? Donner la probabilité de chacun d'entre eux.
Donner la moyenne, $\langle S_z\rangle$ de S_z sur l'état $|\psi\rangle$ ainsi que l'écart quadratique moyen, ΔS_z.

2e- On sélectionne les atomes pour lesquels le résultat de la mesure de S_z est $\hbar/2$.
Quel est leur vecteur état ?
On effectue alors une mesure de S_x. Quels sont les résultats possibles ? Avec quelle probabilité ?
On sélectionne les atomes pour lesquels le résultat de la mesure de S_x est $-\hbar/2$.
Quel est leur vecteur état ?
On mesure de nouveau S_z.
Préciser la moyenne des valeurs de S_z observées ainsi que l'écart quadratique moyen.
Donner les résultats possibles et leur probabilité.

Corrigé des exercices de physique quantique TD3

III- Opérateurs linéaires et Observables

A- Opérateurs linéaires

Exercice 1

1a- Les vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On utilise le symbole $\leftrightarrow$ qui se lit "est représenté par" dans l'expression $|\mathbf{u_2}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et les expressions de même nature. Par contre dans l'expression $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow |\mathbf{u_2}\rangle$ le symbole $\leftrightarrow$ signifie "représente".

On en déduit $A|\mathbf{u_1}\rangle = (1+i)|\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle - |\mathbf{u_3}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A|\mathbf{u_2}\rangle = |\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A|\mathbf{u_3}\rangle = 2|\mathbf{u_1}\rangle - 3|\mathbf{u_3}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Il vient $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A|\mathbf{u_1}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, ce qui détermine la valeur de a_1, b_1 et c_1, soit $a_1 = 1+i$, $b_1 = 2$ et $c_1 = -1$.

De même $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A|\mathbf{u_2}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et par conséquent $a_2 = 1$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 0$.

De même on détermine $a_3 = 2$, $b_3 = 0$ et $c_3 = -3$. Soit en résumé

$$\boxed{A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

1b- Les vecteurs $|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle$ sont représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $|\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{u}_2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{u}_1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\mathbf{v}_3\rangle = |\mathbf{u}_3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On exprime alors $A\mathbf{v}_k$ en fonction de $\mathbf{v}_k$: $A|\mathbf{v}_1\rangle = A|\mathbf{u}_2\rangle = |\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle = 2|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$A|\mathbf{v}_2\rangle = A|\mathbf{u}_1\rangle = (1+i)|\mathbf{u_1}\rangle + 2|\mathbf{u_2}\rangle - |\mathbf{u_3}\rangle = 2|\mathbf{v}_1\rangle + (1+i)|\mathbf{v}_2\rangle - |\mathbf{v}_3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même on trouve $A\,|\mathbf{v}_3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On en déduit $\boxed{A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1+i & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$

Exercice 2

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = |\mathbf{u_1}\rangle + i\,|\mathbf{u_2}\rangle + 2\,|\mathbf{u_3}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$A\,|\boldsymbol{\psi}\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2i \\ 2+2i \\ -7 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (5+2i)\,|\mathbf{u_1}\rangle + (2+2i)\,|\mathbf{u_2}\rangle - 7\,|\mathbf{u_3}\rangle :$$

$$\boxed{A\,|\boldsymbol{\psi}\rangle = (5+2i)\,|\mathbf{u_1}\rangle + (2+2i)\,|\mathbf{u_2}\rangle - 7\,|\mathbf{u_3}\rangle}$$

Exercice 3

3a- $\boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & i \\ 1+i & 2 & 1 \\ 0 & 1+i & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ a pour adjointe } \begin{pmatrix} \cos\theta & 1-i & 0 \\ 1 & 2 & 1-i \\ -i & 1 & \cos\theta \end{pmatrix}}$

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ 1 & 1 & 7i \\ i & 7/i & 0 \end{pmatrix} \text{ a pour adjointe } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ 1 & 1 & -7/i = 7i \\ i & -7i = 7/i & 0 \end{pmatrix}}$: <u>matrice hermitique</u>

$\boxed{\begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i+1 \\ -i & 2+i & -i \end{pmatrix} \text{ a pour adjointe } \begin{pmatrix} 1-i & -1 & i \\ 1 & 2 & 2-i \\ -i & -2i+1 & i \end{pmatrix}}$

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2i+1 \\ 1 & 1 & \dfrac{13}{2+3i} \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix} \text{ a pour adjointe } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2i+1 \\ 1 & 1 & 2-3i = \dfrac{13}{2+3i} \\ 1-2i & \dfrac{13}{2-3i} = 2+3i & 0 \end{pmatrix}}$: <u>hermitique</u>.

3b- Lorsque c'est possible, compléter les matrices suivantes pour qu'elles représentent un opérateur hermitique.

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ ? & 2 & ? \\ ? & 1+i & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1-i \\ -i & 1+i & 0 \end{pmatrix}}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ ? & 1+i & 0 \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix} \to \text{ impossible}}$

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ ? & -4 & e^{i\theta} \\ ? & ? & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -4 & e^{i\theta} \\ \overline{a} & e^{-i\theta} & -4 \end{pmatrix}}$ avec a quelconque$\in \mathbb{C}$.

Exercice 4

•1) Pour déterminer les valeurs propres de M on résout l'équation $Det\,(M - \lambda I) = 0$, ce qui donne les valeurs de λ

•2) On résout le système $MV = \lambda V$. On pose par exemple $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ etc \end{pmatrix}$ avec l'une des composante égale à l'unité.

•3) on orthonormalise le système de vecteurs obtenus.

Avec $M = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ il vient

•1) $Det\,(M - \lambda I) = Det \begin{pmatrix} -\lambda & \dfrac{\hbar}{2} \\ \dfrac{\hbar}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \left(\dfrac{\hbar}{2}\right)^2$ soit $\lambda = \varepsilon\dfrac{\hbar}{2}$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

•2) $MV = \lambda V$ s'écrit ici $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} y = \varepsilon x \\ x = \varepsilon y \end{cases}$

•3) En réalité nous n'avons pas deux équations à résoudre mais une seule car λ est déterminé de telle sorte qu'il y ait une redondance. Pour cette raison, ici je peux poser $x = 1$ (par exemple) et retenir la première équation. Il vient $x = 1$, $y = \varepsilon$. soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$. On peut multiplier V par une constante arbitraire, on obtient encore un vecteur propre soit $V' = C\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ avec $C = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le vecteur V' est normalisé.

Le résultat est $\boxed{V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = \frac{\hbar}{2}}$ et $\boxed{V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = -\frac{\hbar}{2}}$

De même on obtient

$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$: $\boxed{V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = \frac{\hbar}{2}}$ et $\boxed{V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = -\frac{\hbar}{2}}$

$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = \frac{\hbar}{2}}$ et $\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = -\frac{\hbar}{2}}$

$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $\boxed{V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = \frac{\hbar}{2}(1-i)}$ et $\boxed{V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = \frac{\hbar}{2}(1+i)}$

Seule cette dernière matrice n'est pas hermitique (on remarque que ses valeurs propres ne sont pas toutes réelle).

Exercice 5

5a- $\langle \psi | A\psi \rangle = \ A^\dagger\psi \ |\psi\rangle = \langle A\psi | \psi \rangle$. D'où $\boxed{\langle \psi | A\psi \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle}$

$\langle \psi | A\psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle$, d'autre part $\langle A\psi | \psi \rangle = \langle a\psi | \psi \rangle = \overline{a} \langle \psi | \psi \rangle$.

On en déduit $(a - \overline{a}) \langle \psi | \psi \rangle = 0$. Le vecteur $|\psi\rangle$ n'étant pas nul, on trouve $\boxed{a = \overline{a}}$

5b- $A = A^\dagger \Rightarrow \langle \varphi | A\psi \rangle = \langle A\varphi | \psi \rangle$ soit $\langle \varphi | a\psi \rangle = \langle b\varphi | \psi \rangle$. Ce qui donne $\left(a - \overline{b}\right) \langle \varphi | \psi \rangle = 0$. Les relations $\overline{b} = b$ et $b \neq a$ impliquent $\left(a - \overline{b}\right) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\langle \varphi | \psi \rangle = 0}$

Exercice 6

Soient $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ deux vecteurs propres de A pour la valeur propre a et λ un nombre complexe quelconque.
Nous posons $|\boldsymbol{\theta}\rangle = |\psi\rangle + \lambda \ |\varphi\rangle$.
Par hypothèse $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_a$ et $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_a$. Pour démontrer que $\mathcal{E}_a$ est un espace vectoriel nous devons démontrer la relation $|\boldsymbol{\theta}\rangle \in \mathcal{E}_a$.
$|\psi\rangle \in \mathcal{E}_a$ et $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_a \Leftrightarrow A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ et $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$. L'opérateur A est linéaire, ce qui implique $A(|\psi\rangle + \lambda \ |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle + \boldsymbol{\lambda} A|\varphi\rangle = a|\psi\rangle + \lambda a|\varphi\rangle = a(|\psi\rangle + \lambda \ |\varphi\rangle)$ soit $\boxed{A|\boldsymbol{\theta}\rangle = a|\boldsymbol{\theta}\rangle \Leftrightarrow |\boldsymbol{\theta}\rangle \in \mathcal{E}_a}$.

B- Observables et mesure

Exercice 1

1a-

• A et B sont hermitiques, leurs valeurs propres sont réelles ; Par conséquent a et b sont réelles.

$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$, de même on vérifie directement les relations $\langle \mathbf{v}_k | \mathbf{v}_k \rangle = 1$ et $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle = 0$. On en déduit $\boxed{\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}}$

• $-a$, b, $2b$ et $3b$ ne sont pas dégénérées, par contre a est dégénéré d'ordre 2.

• L'opérateur identité satisfait la relation $\mathrm{I}|\psi\rangle = \mathbf{1} \times |\psi\rangle$. Il n'y a qu'une seule valeur propre égale à 1. Tout vecteur est vecteur propre ; cette valeur propre est donc dégénérée d'ordre 3 (dimension de l'espace des états).

1b- $|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle)$, $|\mathbf{u}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle)$, $|\mathbf{u}_3\rangle = |\mathbf{v}_3\rangle$ d'où

$|\psi\rangle = |\mathbf{u}_1\rangle + (1+i)|\mathbf{u}_2\rangle + i|\mathbf{u}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle) + (1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle) + i|\mathbf{v}_3\rangle$, on regroupe les vecteurs propres associés à la même valeur propre de A : $|\psi\rangle = \frac{2+i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_1\rangle + i|\mathbf{v}_3\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_2\rangle = |\psi_a\rangle + |\psi_{-a}\rangle$ avec

$|\psi_a\rangle = \dfrac{2+i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_1\rangle + i|\mathbf{v}_3\rangle$ (vecteur propre pour la valeur propre a) et $|\psi_{-a}\rangle = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_2\rangle$ (vecteur propre pour la valeur propre $-a$).

• La mesure de A donne

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
a	$\dfrac{\langle\psi_a\|\psi_a\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle} = \dfrac{7}{8}$	$\|\psi_a\rangle$
$-a$	$\dfrac{\langle\psi_{-a}\|\psi_{-a}\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle} = \dfrac{1}{8}$	$\|\psi_{-a}\rangle$

Nous utilisons la notation $|\psi_+\rangle$ pour désigner l'état immédiatement après la mesure.

• La mesure de B donne un résultat qui dépend du résultat de la première mesure :

1) Résultat de la première mesure $= a$. L'état est $|\psi_a\rangle = \dfrac{2+i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_1\rangle + i|\mathbf{v}_3\rangle = \dfrac{2+i}{\sqrt{2}}\left((|\mathbf{u}_1\rangle + |\mathbf{u}_2\rangle)/\sqrt{2}\right) + i|\mathbf{u}_3\rangle$ soit $|\psi_a\rangle = \dfrac{2+i}{2}|\mathbf{u}_1\rangle + \dfrac{2+i}{2}|\mathbf{u}_2\rangle + i|\mathbf{u}_3\rangle$. La décomposition en une somme de vecteurs propres de B est effectuée car $|\mathbf{u}_1\rangle$, $|\mathbf{u}_2\rangle$ et $|\mathbf{u}_3\rangle$ sont des vecteurs propres pour les valeurs propres b, $2b$ et $3b$.

Les résultats de la seconde mesure sont

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
b	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\left\|\dfrac{2+i}{2}\right\|^2 = \dfrac{5}{14}$	$\|\mathbf{u}_1\rangle$
$2b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\left\|\dfrac{2+i}{2}\right\|^2 = \dfrac{5}{14}$	$\|\mathbf{u}_2\rangle$
$3b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\|i\|^2 = \dfrac{4}{14}$	$\|\mathbf{u}_3\rangle$

2) Résultat de la première mesure $= -a$. L'état est $|\psi_{-a}\rangle = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_2\rangle = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{|\mathbf{u}_1\rangle - |\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{2}}\right)$, d'où

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
b	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\left\|\dfrac{-i}{2}\right\|^2 = \dfrac{1}{2}$	$\|\mathbf{u}_1\rangle$
$2b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\left\|\dfrac{i}{2}\right\|^2 = \dfrac{1}{2}$	$\|\mathbf{u}_2\rangle$
$3b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle} \times 0 = 0$	

• En résumé il vient

résultats	proba	$\|\psi_+\rangle$
a, b	$\dfrac{7}{8} \times \dfrac{5}{14} \simeq 0,312$	$\|\mathbf{u}_1\rangle$
$a, 2b$	$\dfrac{7}{8} \times \dfrac{5}{14} \simeq 0,312$	$\|\mathbf{u}_2\rangle$
$a, 3b$	$\dfrac{7}{8} \times \dfrac{4}{14} \simeq 0,250$	$\|\mathbf{u}_3\rangle$

ou

résultats	proba	$\|\psi_+\rangle$
$-a, b$	$\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{2} \simeq 0,0625$	$\|\mathbf{u}_1\rangle$
$-a, 2b$	$\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{2} \simeq 0,0625$	$\|\mathbf{u}_2\rangle$
$-a, 3b$	$\dfrac{1}{8} \times 0 = 0$	

N.B. La somme des probabilités calculées peut ne pas être égale à l'unité pour des questions d'arrondis numérique.

1c- Echangeons l'ordre des mesures.

• La mesure de B sur l'état $|\psi\rangle = |\mathbf{u}_1\rangle + (1+i)|\mathbf{u}_2\rangle + i|\mathbf{u}_3\rangle$ donne

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
b	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\|1\|^2 = \dfrac{1}{4}$	$\|\mathbf{u}_1\rangle$
$2b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle}\|1+i\|^2 = \dfrac{2}{4}$	$\|\mathbf{u}_2\rangle$
$3b$	$\dfrac{1}{\langle\psi\|\psi\rangle} \times \|1\|^2 = \dfrac{1}{4}$	$\|\mathbf{u}_3\rangle$

• Le résultat de la mesure de A dépend du résultat de la première mesure

1) Résultat de la première mesure $= b$. L'état est $|\mathbf{u}_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_1\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_2\rangle$ où $|\mathbf{v}_1\rangle$ et $|\mathbf{v}_2\rangle$ sont des vecteurs propres de A pour les valeurs propres a et $-a$.

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
a	$\frac{1}{2}$	$\|\mathbf{v}_1\rangle$
$-a$	$\frac{1}{2}$	$\|\mathbf{v}_2\rangle$

2) Résultat de la première mesure $= 2b$. L'état est $|\mathbf{u}_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_1\rangle - \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{v}_2\rangle$.

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
a	$\frac{1}{2}$	$\|\mathbf{v}_1\rangle$
$-a$	$\frac{1}{2}$	$\|\mathbf{v}_2\rangle$

3) Résultat de la première mesure $= 3b$. L'état est $|\mathbf{u}_3\rangle = |\mathbf{v}_3\rangle$, vecteur propre de A pour la valeur propre a.

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
a	1	$\|\mathbf{v}_3\rangle = \|\mathbf{u}_3\rangle$
$-a$	0	

• En résumé il vient

résultats	proba	$\|\psi_+\rangle$
b, a	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \simeq 0,125$	$\|\mathbf{v}_1\rangle$
$2b, a$	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \simeq 0,250$	$\|\mathbf{v}_1\rangle$
$3b, a$	$\frac{1}{4} \times 1 \simeq 0,250$	$\|\mathbf{v}_3\rangle$

ou

résultats	proba	$\|\psi_+\rangle$
$b, -a$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \simeq 0,125$	$\|\mathbf{v}_2\rangle$
$2b, -a$	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \simeq 0,250$	$\|\mathbf{v}_2\rangle$
$3b, -a$	$\frac{1}{4} \times 0 = 0$	

1d- Les résultats obtenus dépendent de l'ordre des opérations. C'est généralement le cas lorsque les deux opérateurs ne commutent pas. Pour le vérifier formons $\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = \tilde{A}\,\tilde{B} - \tilde{B}\,\tilde{A}$.

$$\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = \tilde{A}\,\tilde{B} - \tilde{B}\,\tilde{A} = ab\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - ab\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{ab\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]} \neq 0$$

Lorsque $|\psi\rangle = |\mathbf{u}_3\rangle = |\mathbf{v}_3\rangle$ <u>l'ordre des mesures n'intervient pas</u> car $|\psi\rangle$ étant un vecteur propre de A et de B, la mesure de A laisse $|\psi\rangle$ inchangé de même que la mesure de B. Lorsque les opérateurs ne commutent pas, il peut arriver que l'ordre des mesure soit indifférent mais de tels cas sont des cas particuliers.

Exercice 2

2a-

• $|\mathbf{u}_{(+)}\rangle$ et $|\mathbf{u}_{(-)}\rangle$ sont des vecteurs propres du même opérateur hermitique pour des valeurs propres différentes. Ils sont donc orthogonaux : $\boxed{\mathbf{u}_{(+)}\,|\mathbf{u}_{(-)}\rangle = 0}$. Deux vecteurs proportionnels représentent le même état physique il est donc loisible de choisir $|\mathbf{u}_{(+)}\rangle$ et $|\mathbf{u}_{(-)}\rangle$ normalisés pour décrire les états physiques considérés.

• $|\mathbf{v}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ et $|\mathbf{w}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\mathbf{v}\,|\mathbf{w}\rangle = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} = (4-4i)$. $\boxed{\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{w}\rangle = 4\,(1-i)}$

• $|\mathbf{v}\rangle = a\,|\mathbf{u}_{(+)}\rangle + b\,|\mathbf{u}_{(-)}\rangle \Rightarrow \langle\mathbf{v}\,|\mathbf{v}\rangle = |a^2| + |b|^2$ soit $\boxed{\||\mathbf{v}\rangle\| = \sqrt{\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{v}\rangle} = \sqrt{|a^2| + |b|^2}}$

2b- L'espace des états est de dimension 2 (deux valeurs propres différentes non dégénérées). Les vecteurs $|\mathbf{u}_{(+)}\rangle$ et $|\mathbf{u}_{(-)}\rangle$ représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisfont les relations $S_z\,|\mathbf{u}_{(+)}\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\,|\mathbf{u}_{(+)}\rangle$ et $S_z\,|\mathbf{u}_{(-)}\rangle = -\dfrac{\hbar}{2}\,|\mathbf{u}_{(-)}\rangle$. Ces relations définissent complètement l'opérateur et par conséquent sa représentation (voir ci-dessus l'exercice A- I-1-.

2c-

• Mesurer la projection d'une grandeur suivant une direction ou une autre correspond à l'usage du même appareil orienté différemment. L'isotropie de l'espace implique que les résultats possibles sont les mêmes.

• La mesure de S_x peut donc donner $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$.

On vérifie les relations $\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{\hbar}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\dfrac{\hbar}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui démontre le résultat.

2d-

• L'état initial est $|\boldsymbol{\psi}\rangle = \left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + (1+i)\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$. Une mesure de S_z donne

résultat	proba	$\left\vert\boldsymbol{\psi}_+\right\rangle$
$\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{\langle\boldsymbol{\psi}\,\vert\boldsymbol{\psi}\rangle}\vert 1\vert^2 = \dfrac{1}{3}$	$\left\vert\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle$
$-\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{\langle\boldsymbol{\psi}\,\vert\boldsymbol{\psi}\rangle}\vert(1+i)\vert^2 = \dfrac{2}{3}$	$\left\vert\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$

• $\langle S_z\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\times\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{\hbar}{2}\right)\times\dfrac{2}{3} = -\dfrac{\hbar}{6}$, $\;S_z^2\rangle = \left(\dfrac{\hbar}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{\hbar}{2}\right)^2\times\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{\hbar}{2}\right)^2$ d'où $\Delta S_z = \sqrt{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2} =$ $\sqrt{\left(\dfrac{\hbar}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{\hbar}{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\hbar$. En résumé

$$\boxed{\langle S_z\rangle = -\frac{\hbar}{6} \quad \text{et} \qquad \Delta S_z = \frac{\sqrt{2}}{3}\times\hbar}$$

2e-

On constate que la mesure de S_z donne $\hbar/2$; l'état immédiatement après est donc

$\boxed{|\boldsymbol{\psi}\rangle = \left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathbf{v}_{(+)}\right\rangle + \left|\mathbf{v}_{(-)}\right\rangle\right).}$ Une mesure de S_x donne

résultat	proba	$\left\vert\boldsymbol{\psi}_+\right\rangle$
$\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\left\vert\mathbf{v}_{(+)}\right\rangle$
$-\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\left\vert\mathbf{v}_{(-)}\right\rangle$

On sélectionne les atomes pour lesquels le résultat de la mesure de S_x est $-\hbar/2$. Le vecteur état est alors $\boxed{|\boldsymbol{\psi}\rangle = \left|\mathbf{v}_{(-)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle - \left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right)}$.

On forme $\langle\boldsymbol{\psi}\,|S_z\boldsymbol{\psi}\rangle = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle - \left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right) \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + \dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right)\right\rangle = 0$ d'où $\langle S_z\rangle = \dfrac{\langle\boldsymbol{\psi}\,|S_z\boldsymbol{\psi}\rangle}{\langle\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}\rangle} = 0$.

S_z étant hermitique il vient $\langle\boldsymbol{\psi}\,|S_z^2\boldsymbol{\psi}\rangle = \langle S_z\boldsymbol{\psi}\,|S_z\boldsymbol{\psi}\rangle = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + \dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right) \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle + \dfrac{\hbar}{2}\left|\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle\right)\right\rangle$

soit $\langle\boldsymbol{\psi}\,|S_z^2\boldsymbol{\psi}\rangle = \dfrac{\hbar^2}{4}$. On en déduit $\;S_z^2\rangle = \dfrac{\langle\boldsymbol{\psi}\,|S_z^2\boldsymbol{\psi}\rangle}{\langle\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}\rangle} = \dfrac{\hbar^2}{4}$ car ici, $\langle\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}\rangle = \;\mathbf{v}_{(-)}\left|\mathbf{v}_{(-)}\right\rangle 1$.

Il vient $\Delta S_z = \sqrt{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2} = \dfrac{\hbar}{2}$. En résumé

$$\boxed{\langle S_z\rangle = 0 \;\; \text{et} \qquad \Delta S_z = \frac{\hbar}{2}}$$

Plus précisément, une mesure de S_z donne

résultat	proba	$\left\vert\boldsymbol{\psi}_+\right\rangle$
$\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\left\vert\mathbf{u}_{(+)}\right\rangle$
$-\dfrac{\hbar}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\left\vert\mathbf{u}_{(-)}\right\rangle$

Remarquons que la seconde mesure a perturbé l'état du système obtenu après la première mesure.