

Chapitre 3

LE MOMENT CINÉTIQUE : UN EXEMPLE DE SYSTÈME QUANTIQUE

Se reporter à la bibliographie pour le détail des démonstrations et la description de l'expérience de Stern et Gerlach.

3.1 Définitions

a- Considérons une particule décrite par une fonction d'onde scalaire $\psi(\vec{r})$ en représentation *position*. On définit le moment cinétique orbital par rapport à l'origine comme l'ensemble des trois opérateurs

$$L_x = yp_z - zp_y; \quad L_y = zp_x - xp_z; \quad L_z = xp_y - yp_x$$

où $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

On écrit donc

$$\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla}$$

En utilisant les relations de commutation $[p_x, x] = -i\hbar$; $[p_x, y] = [p_x, z] = 0$ ainsi que celles qui s'en déduisent par les permutations de (x, y, z) , on obtient :

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

En utilisant les propriétés du produit vectoriel, cette relation s'écrit symboliquement sous la forme :

$$\vec{L} \wedge \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

b- De façon générale on définit un moment cinétique \vec{J} comme un ensemble de trois opérateurs observables (J_x, J_y, J_z) satisfaisant la relation

$$\vec{J} \wedge \vec{J} = i\hbar \vec{J}$$

Les opérateurs J_x, J_y, J_z sont des observables associées à la mesure de la projection du moment cinétique sur les trois axes Ox, Oy, Oz d'un repère orthonormé galiléen.

c- On définit également les trois opérateurs \vec{J}^2, J_+ et J_-

$$\vec{J}^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad J_{\pm} := J_x \pm i J_y = J_{\mp}^{\dagger}$$

3.2 Relations utiles

On vérifie les relations de commutation suivantes entre les opérateurs quelconques A , B et C

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \text{ et } [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

a- On démontre alors

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_x] &= [\vec{J}^2, J_y] = [\vec{J}^2, J_z] = 0, \quad [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0 \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm \hbar J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \end{aligned}$$

b- On vérifie également les relations

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= \vec{J}^2 + \hbar J_z - J_z^2 \\ J_- J_+ &= \vec{J}^2 - \hbar J_z - J_z^2 \end{aligned}$$

c- On démontre que les valeurs propres, Λ , de l'observable \vec{J}^2 sont réelles non négatives. Toute quantité Λ peut donc s'écrire sous la forme $\Lambda = j(j+1)\hbar^2$ où j est une quantité non négative complètement déterminée (une fois que Λ est donné). Les valeurs propres de \vec{J}^2 seront prises sous la forme $j(j+1)\hbar^2$ avec $j \geq 0$.

Les valeurs propres de J_z sont réelles car J_z est une observable ; on les écrit sous la forme $m\hbar$ où m est réel.

La quantité $m\hbar$ est le résultat éventuel d'une mesure de J_z , elle est donc de mêmes dimensions physique qu'un moment cinétique ; \hbar s'exprime en Js, ses dimensions sont donc celles d'un moment cinétique et, par conséquent, m est un nombre sans dimensions (on vérifie qu'il en est de même de j).

Les observables \vec{J}^2 et J_z commutent. On choisit une base standard de l'espace des états, $\{|j, m, \tau\rangle\}$ constituée de vecteurs propres de chacun de ces deux opérateurs :

$$\vec{J}^2|j, m, \tau\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m, \tau\rangle \text{ et } J_z|j, m, \tau\rangle = m\hbar|j, m, \tau\rangle$$

On peut considérer l'indice τ comme la valeur propre d'une troisième observable, T , telle que T , \vec{J}^2 et J_z forment un ECOC. Pour simplifier, nous supposons que T commute également avec J_+ et J_- .

Nous considérons le sous-espace propre de T pour la valeur propre τ , noté $\mathcal{E}_{j,\tau}$. Dans ces conditions, les opérateurs J_x , J_y et J_z sont des opérateurs internes à $\mathcal{E}_{j,\tau}$. Il en est de même de tous les polynômes que l'on forme à partir de ces opérateurs, tels J_{\pm} et \vec{J}^2 .

3.3 Bases standards

Nous considérons le sous-espace $\mathcal{E}_{j,\tau}$, espace propre des observables T et \vec{J}^2 pour les valeurs propres τ et $\hbar^2 j(j+1)$. Considérons un ket $|\psi\rangle$ de $\mathcal{E}_{j,\tau}$. Formons le ket $K|\psi\rangle$ où K est une combinaison linéaire de J_x , J_y et J_z (par exemple $K = J_+$). Les relations $[K, \vec{J}^2] = 0 = [K, T]$ impliquent que $K|\psi\rangle$ est également un ket de $\mathcal{E}_{j,\tau}$.

En effet, $T(K|\psi\rangle) = K(T|\psi\rangle) = \tau K|\psi\rangle$. Le ket $K|\psi\rangle$ est vecteur propre de T pour la valeur propre τ . De même on démontre qu'il est également vecteur propre de \vec{J}^2 pour la valeur propre $\hbar^2 j(j+1)$. Le ket $K|\psi\rangle$ appartient donc à $\mathcal{E}_{j,\tau}$.

a- Soit un état $|\psi\rangle$ tel que $\vec{J}^2|\psi\rangle = j(j+1)\hbar^2|\psi\rangle$ et $J_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle$. L'ensemble des états satisfaisant ces propriétés forme un sous-espace vectoriel, $\mathcal{E}_{j,m,\tau}$ de l'espace des états, \mathcal{E} . On démontre la relation $|m| \leq \sqrt{j(j+1)}$.

b- On vérifie que $J_+|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{j,m+1,\tau}$. En appliquant successivement J_+ on "monte une échelle" au dessus de $|\psi\rangle$ dont chaque nouveau "barreau" est un vecteur. La valeur de m s'accroît d'une unité à chaque barreau. La relation $m \leq \sqrt{j(j+1)}$ implique que cette échelle possède un nombre fini de barreaux au dessus de $|\psi\rangle$. Il existe donc un "vecteur de tête" non nul $|\psi_{Max}\rangle$ tel que $J_+|\psi_{Max}\rangle = 0$.

c- De même $J_-|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{j,m-1,\tau}$. On "descend une échelle" au dessous de $|\psi\rangle$ en appliquant successivement l'opérateur J_- . La relation $m \geq -\sqrt{j(j+1)}$ implique que cette échelle possède un nombre fini de barreaux au dessous de $|\psi\rangle$. Le dernier vecteur de l'échelle non nul est le "vecteur de queue" $|\psi_{min}\rangle$ tel que $J_-|\psi_{min}\rangle = 0$.

d- Les relations

$$J_-J_+|\psi\rangle = \hbar^2(j(j+1) - m(m+1))|\psi\rangle$$

et

$$J_+J_-|\psi\rangle = \hbar^2(j(j+1) - m(m-1))|\psi\rangle$$

assurent que c'est la même échelle que l'on monte et que l'on descend dans \mathcal{E}_τ , au moyen de J_+ et J_- car deux kets proportionnels décrivent le même état physique.

e- A $|\psi_{Max}\rangle$ et $|\psi_{min}\rangle$ correspondent la valeur maximale m_{Max} et minimale m_{min} de m . Par conséquent $m_{Max} - m_{min} = N$, un entier non négatif.

L'étude de $\langle\psi_{Max}|J_-J_+|\psi_{Max}\rangle$ et de $\langle\psi_{min}|J_+J_-|\psi_{min}\rangle$ conduisent aux relations $m_{Max} = j$ et $m_{min} = -j$.

On obtient donc les relations

$$2j = N \quad \text{et} \quad m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j$$

Lorsque N est pair, j est entier ; lorsque N est impair j est dit *demi entier*.

f- La base standard est obtenue en imposant les relations de normalisation suivantes :

$$\begin{aligned} J_-|j, m, \tau\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1, \tau\rangle \\ J_+|j, m, \tau\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1, \tau\rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

En partant d'un vecteur de tête $|j, j, \tau\rangle$ normalisé, tous les vecteurs en dessous sont également normalisés. En appliquant $(J_-)^{2j}$ sur le vecteur de tête on obtient le vecteur de queue, $|j, -j, \tau\rangle$.

En remontant l'échelle à partir du vecteur de queue on retrouve sur chaque barreau le vecteur ket déjà obtenu en descendant l'échelle.

3.4 Le spin 1/2

Considérons le cas $j = 1/2$. Dans ce cas $m = \pm 1/2$. Choisissons pour base de \mathcal{E} les vecteurs $\{|j, m\rangle\}$. Posons $|1/2, 1/2\rangle := |+\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle := |-\rangle$. Les relations précédentes donnent

$$\boxed{J_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle \quad J_+|+\rangle = 0 \quad J_-|+\rangle = \hbar|-\rangle \quad J_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \quad J_-|-\rangle = 0}$$

Dans ce cas le moment cinétique est noté S de préférence à J : Les relations ci-dessus fournissent la représentation de \vec{S} dans la base standard considérée :

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}; S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

On écrit

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \text{ avec } \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les *matrices de Pauli*.

Remarquons que nous avons (par abus d'écriture) identifié les kets aux matrices colonne qui les représentent et les opérateurs à leur représentation. Cet abus d'écriture est souvent pratiqué lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

3.5 Le moment cinétique orbital

a- On peut repérer les point de l'espace en coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi); y = r \sin(\theta) \sin(\phi); z = r \cos(\theta)$$

La fonction d'onde scalaire d'une particule est alors une fonction de r, θ, ϕ notée $\psi(r, \theta, \phi)$.

Etant donné deux états $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$, leur produit scalaire s'écrit

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Phi^\dagger(r, \theta, \phi) \Psi(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\phi$$

b- Considérons le moment cinétique orbital \vec{L} . On obtient les expressions suivantes

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \vec{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$$L_+ = \hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad L_- = \hbar e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

Supposons pour fixer les idées que la particule possède une masse M et qu'elle est soumise à une énergie potentielle $V(r)$ (potentiel central). Son hamiltonien est alors

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + V(r) + \frac{1}{2Mr^2} \vec{L}^2$$

Dans tous les cas on peut introduire une observable K , convenablement choisie, n'agissant que sur la variable r , afin de former l'ECOC $\{\vec{L}^2, L_z, K\}$. Cependant pour étudier le problème de la particule soumise à un potentiel central, il est intéressant de considérer le cas où $\{\vec{L}^2, L_z, H\}$ forment un ECOC.

c- Dans le cas du moment cinétique orbital, on utilise la notation ℓ de préférence à j . Considérons une base standard dont on note $\psi_{E,\ell,m}(r,\theta,\phi)$ la fonction d'onde des kets qui la constituent.

$$H \psi_{E,\ell,m} = E \psi_{E,\ell,m}, \quad \vec{L}^2 \psi_{E,\ell,m} = \hbar \ell(\ell+1) \psi_{E,\ell,m} \quad (3.2)$$

$$L_z \psi_{E,\ell,m} = \hbar m \psi_{E,\ell,m} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_{E,\ell,m} \quad (3.3)$$

La relation (3.3) donne $\psi_{E,\ell,m} = e^{im\phi} u_{E,\ell,m}(r,\theta)$.

Les points (r,θ,ϕ) et $(r,\theta,\phi+2\pi)$ sont confondus, ce qui implique $\psi_{E,\ell,m}(r,\theta,\phi) = \psi_{E,\ell,m}(r,\theta,\phi+2\pi)$, soit $e^{2im\pi} = 1 \Rightarrow m$ est un entier relatif. Ainsi $m_{Max} = \ell$ est un entier non négatif.

d- On détermine la fonction d'onde du vecteur de tête, $\psi_{E,\ell,\ell} = e^{i\ell\phi} u_{E,\ell,\ell}(r,\theta)$ au moyen de la relation

$$L_+ (e^{i\ell\phi} u_{E,\ell,\ell}(r,\theta)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_{E,\ell,\ell}}{\partial \theta} - \ell \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_{E,\ell,\ell} = 0$$

En intégrant cette équation différentielle on trouve $u_{E,\ell,\ell} = c_\ell \sin^\ell \theta \cdot R_{E,\ell}(r)$ où $R_{E,\ell}(r)$ est une fonction de r (déterminée par la première des relations (3.2) et c_ℓ une constante arbitraire. On choisit

$$c_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}$$

et on pose

$$Y_\ell^\ell := c_\ell e^{i\ell\phi} \sin^\ell \theta$$

e- On obtient $\psi_{E,\ell,m}$ en appliquant les relations de récurrences (3.1). L'opérateur L_- n'agit pas sur la variable r ; on trouve :

$$\psi_{E,\ell,m} = R_{E,\ell}(r,\theta) \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi) \text{ avec } Y_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{\ell-m} Y_\ell^\ell(\theta,\phi) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} Y_\ell^m(\theta,\phi) &= \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \times e^{im\phi} \cdot \sin^{-m} \theta \left[\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} (1-x^2)^\ell \right]_{x=\cos \theta} \\ &= \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \times e^{im\phi} \cdot \sin^m \theta \left[\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right]_{x=\cos \theta} \end{aligned}$$

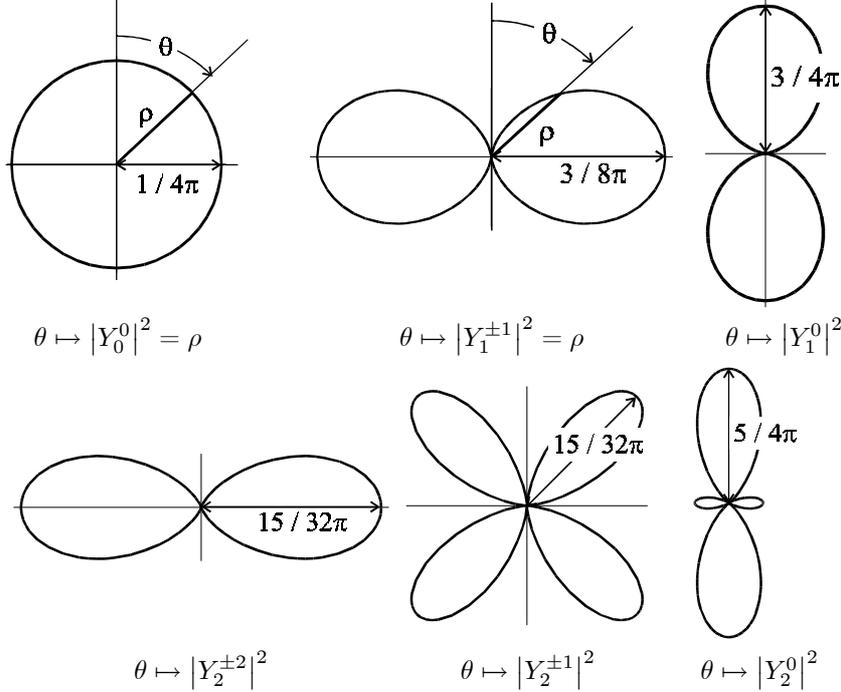
$$E R_{E,\ell}(r) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2 R_{E,\ell}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_{E,\ell}(r)}{\partial r} \right) + V(r) R_{E,\ell}(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2M r^2} R_{E,\ell}(r) \quad (3.5)$$

Le choix de c_ℓ assure les conditions d'orthonormalisation :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (Y_\ell^m)^\dagger Y_{\ell'}^{m'} \sin \theta \cdot d\theta d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Les fonctions $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ sont les *harmoniques sphériques*, elles sont indépendantes de la façon dont on a complété l'ECOC (au moyen de H ou d'un autre opérateur). On donne dans la figure ci-dessous la représentation polaire des fonctions $\theta \mapsto |Y_\ell^m|^2$ pour $\ell = 0, 1, 2$:

| | | |
|--|--|--|
| $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ | $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta$ | $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ |
| $Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{\pm 2i\phi} \sin^2 \theta$ | $Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \cos \theta$ | $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$ |



f- Pour les états liés, dont la probabilité de présence décroît vers zéro lorsqu'on s'éloigne ($r \rightarrow \infty$), les valeurs propres de H sont discrètes. La relation (3.5) montre qu'elles dépendent de ℓ . L'indice ℓ étant donné on introduit l'indice k ($k = 1, 2, \dots$) destiné à numéroter ces valeurs propres, $E_{k,\ell}$, en ordre croissant ($E_{1,\ell} < E_{2,\ell} < \dots$). On pose $n = \ell + k$ et on effectue le changement de notation $R_{E,\ell} \mapsto R_{n,\ell}$ et $E_{k,\ell} \mapsto E_{n,\ell}$ (avec $n = k + \ell > \ell$).

Dans le cas d'une particule de charge $q_e = -e$, de masse m_e , soumise au potentiel électrostatique central d'une charge $e = -q_e$, l'énergie $E_{n,\ell}$ ne dépend que de n . On démontre $E_n = E_0/n^2$.

L'énergie fondamentale est $E_0 = -m_e c^2 \alpha^2 / 2 \simeq -13,6 \text{ eV}$. La constante α est la constante de structure fine : $\alpha := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}$. Si les électrons étaient dénués de spin, un tel système pourrait représenter un atome d'hydrogène sous certaines approximations (pas de corrections : ni relativistes, ni isotopiques).

g- Pour déterminer les fonctions $R_{n,\ell}(r)$, on leur impose diverses conditions qui assurent la continuité de la répartition de la probabilité de présence dans l'espace ainsi que la décroissance vers zéro de cette probabilité lorsque $r \rightarrow \infty$ (état lié). On impose aussi la condition de normalisation

$$\int_{r=0}^{\infty} (R_{n,\ell})^\dagger R_{n,\ell} \cdot r^2 dr = 1.$$

Cette condition est posée pour des raisons de convenance et non pour des raisons physiques, à la différence des conditions précédentes.

Les fonctions $\psi_{E,\ell,m} = R_{E,\ell}(r,\theta) \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi)$ sont notées $\psi_{n,\ell,m} = R_{n,\ell}(r,\theta) \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi)$; elles constituent alors une base orthonormée discrète de l'espace des fonctions d'ondes des états considérés.

h- On utilise souvent les notations spectroscopique :

$$\begin{array}{cccc} \text{état} & s & p & d & f \\ \ell = & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Lorsque n et ℓ sont donnés, la dégénérescence est $2\ell + 1$. Lorsque l'énergie ne dépend que de n , la dégénérescence du niveau d'énergie E_n est n^2 .

i- Pour interpréter le sens des résultats obtenus, considérons l'état $|n,\ell,m\rangle$ décrit par la fonction d'onde $\psi_{n,\ell,m}$.

1. La probabilité de présence de la particule dans la coquille sphérique de rayon compris entre r et $r + dr$ est $|R_{n,\ell}|^2 r^2 dr$.
2. La probabilité de présence dans la direction (θ, φ) , dans l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ est $|Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$. Remarquons que $|Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2$ est indépendant de φ : cette propriété signifie que ces probabilités présentent la symétrie de révolution autour de l'axe Oz . La probabilité de l'intervalle $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ est donc $\frac{d\varphi}{2\pi}$, tandis que la probabilité de l'intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$ est $2\pi |Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta$.

3.6 L'expérience de Stern et Gerlach

(Voir cours de Licence et bibliographie)

L'expérience de Stern et Gerlach "mesure" le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'un atome. De façon générale, $\vec{\mu}$ est proportionnel au moment cinétique : $\vec{\mu} = g \frac{q_e}{2me} \vec{J}$ où g est le facteur de Landé (voir le modèle vectoriel de l'atome dans le cours de licence ou ci-après le théorème de Wigner-Eckart).

Dans un fort gradient de champ magnétique, un jet d'atomes est séparé en plusieurs jets correspondant chacun à une valeur du moment cinétique J_z : chaque jet donne une tache sur un écran.

L'expérience de Stern et Gerlach confirme la théorie de la mesure (nombre discret de taches correspondant aux valeurs discrètes de J_z , et non une seule tache qui correspondrait à une répartition continue des valeurs de J_z). Le nombre de taches est donc égal au nombre de valeurs de m distinctes, soit $2j + 1$.

On observe un nombre impair de taches avec certains atomes. Ce résultat signifie que j est entier. Ce qui n'est pas en contradiction avec l'hypothèse que les moments cinétiques des atomes sont des moments orbitaux.

Pour d'autres atomes, on observe un nombre pair de taches. Ce qui implique que j est demi entier ($2j = 2N + 1$). L'expérience de Stern et Gerlach confirme donc l'existence des moments cinétiques demi-entiers. Ceux-ci ne sont pas de simples objets mathématiques, conséquence d'une définition abstraite du moment cinétique. Ce sont les outils de description d'une propriété physique, le spin, que présentent de nombreux atomes et particules.