Université Pierre et Marie Curie

Physique quantique appliquée
Master 1ère année
Correction sommaire

Moments cinétiques :

Exercice n°1 :

1- $\langle L_x \rangle = \dfrac{\langle lm|L_x|lm\rangle}{\langle lm|lm\rangle} = \langle lm|\dfrac{(L_+ + L_-)}{2}|lm\rangle = 0$

$\langle L_y \rangle = \langle lm|\dfrac{(L_+ - L_-)}{2i}|lm\rangle = 0$

$\langle L_z \rangle = \langle lm|L_z|lm\rangle = m\hbar$

$\langle \vec{L} \rangle = \begin{vmatrix} \langle L_x \rangle \\ \langle L_y \rangle \\ \langle L_z \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m\hbar \end{vmatrix}$ (L'état |lm> est bien un état propre de L_z.)

$$\left\langle L_x{}^2 \right\rangle = \langle lm|\frac{(L_+ + L_-)^2}{4}|lm\rangle = \langle lm|\frac{L_+L_-}{4}|lm\rangle + \langle lm|\frac{L_-L_+}{4}|lm\rangle = \left(j\,(j+1) - m^2\right)\hbar^2$$

$$\left\langle L_y{}^2 \right\rangle = \langle lm|\frac{(L_+ - L_-)^2}{-4}|lm\rangle = \langle lm|\frac{L_+L_-}{4}|lm\rangle + \langle lm|\frac{L_-L_+}{4}|lm\rangle = \left(j\,(j+1) - m^2\right)\hbar^2$$

$$\left\langle L_z{}^2 \right\rangle = \langle lm|L_z^2|lm\rangle = m^2\hbar^2$$

2- $\Delta L_x = \sqrt{\left\langle L_x^2 \right\rangle - \left\langle L_x \right\rangle^2} = \sqrt{j(j+1) - m^2}\ \hbar$

$\Delta L_y = \sqrt{\left\langle L_y^2 \right\rangle - \left\langle L_y \right\rangle^2} = \sqrt{j(j+1) - m^2}\ \hbar$

$\Delta L_z = \sqrt{\left\langle L_z^2 \right\rangle - \left\langle L_z \right\rangle^2} = 0$

Exercice n°2 :

On choisit : $|1\,-1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad |1\,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad |1\,1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

1- Ecrire la matrice des opérateurs J^2, J_x, J_y, J_z.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 \end{pmatrix} \qquad J_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad J_z = \begin{pmatrix} -\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar \end{pmatrix}$$

2- Exprimer en fonction des kets propres |j m_z> les états propres communs à J^2 et J_x que l'on note |j m_x>$_x$.

$$\text{dét}(J_x-\lambda\, I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2-\frac{\hbar^2}{2}\right)+\lambda\,\frac{\hbar^2}{2} = -\lambda\left(\lambda^2-\hbar^2\right)$$

Les solutions sont : $\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_2 = \hbar \quad ; \quad \lambda_3 = -\hbar$

Les vecteurs propres associés sont alors :

- $\lambda_1 = 0 \qquad |10\rangle_x = \dfrac{|1\,-1\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$
- $\lambda_2 = \hbar \qquad |11\rangle_x = \dfrac{|1\,-1\rangle + \sqrt{2}|1\,0\rangle + |11\rangle}{2}$
- $\lambda_3 = -\hbar \qquad |1\,-1\rangle_x = \dfrac{|1\,-1\rangle - \sqrt{2}|1\,0\rangle + |11\rangle}{2}$

Exercice n°3 :

1- $H_0|\varepsilon_1\ \varepsilon_2\rangle = -\omega(S_{1z}+S_{2z})|\varepsilon_1\ \varepsilon_2\rangle = -\omega\frac{\hbar}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)|\varepsilon_1\ \varepsilon_2\rangle$

énergie	vecteur propre	dégénérescence
$-\hbar\omega$	$\|++\rangle$	1 : non dégénéré
0	$\|+-\rangle, \|-+\rangle$	2
$\hbar\omega$	$\|--\rangle$	1 : non dégénéré

2- $H = H_0 + W$

avec $W = A\left(\vec{S}_1\bullet\vec{S}_2 - 3\left(\vec{S}_1\bullet\vec{e}_z\right)\left(\vec{S}_2\bullet\vec{e}_z\right)\right) = A\left(S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}-2\,S_{1z}S_{2z}\right)$

$W = A\left(\frac{S_{1+}S_{2-}+S_{1-}S_{2+}}{2} - 2\,S_{1z}S_{2z}\right)$

On en déduit la matrice de W :

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{A}{2}\hbar^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A\frac{\hbar^2}{2} & A\frac{\hbar^2}{2} & 0 \\ 0 & A\frac{\hbar^2}{2} & A\frac{\hbar^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{2}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

La matrice de W n'est pas diagonale. La base composée n'est pas une base de vecteurs propres.

3.a- En appliquant chaque opérateur sur la base composée, on montre directement que :

$\vec{S}_1^{\,2} = \frac{3\hbar^2}{4}I \qquad \vec{S}_2^{\,2} = \frac{3\hbar^2}{4}I$

..

$S_{1z}{}^2 = \frac{\hbar^2}{4}I \qquad S_{2z}{}^2 = \frac{\hbar^2}{4}I$

3.b- $\vec{S}^2 = \vec{S}_2^{\,2} + \vec{S}_1^{\,2} + 2\,\vec{S}_1\bullet\vec{S}_2$

$S_z{}^2 = S_{2z}{}^2 + S_{1z}{}^2 + 2\,S_{1z}S_{2z}$

On a donc :

$$W = A\left(\vec{S}_1\bullet\vec{S}_2 - 3\left(\vec{S}_1\bullet\vec{e}_z\right)\left(\vec{S}_2\bullet\vec{e}_z\right)\right) = A\left(\frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2} - 3\left(\frac{S_z^2 - S_{2z}^2 - S_{1z}^2}{2}\right)\right)$$

$$W = \frac{A}{2}\left(S^2 + \frac{3\hbar^2}{2}I - 3\left(S_z^2 + \frac{\hbar^2}{4}I\right)\right)$$

On a donc $W = \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - K\, S_z^2\right)$ avec K =3.

4- On considère la base standard {|s m>} de $\mathcal{E}$.

4.a- s peut prendre les valeurs 0 (= s_1-s_2) ou 1 (= s_1+s_2)

La base standard est donc :

$\left\{|0\,0\rangle; |1\,-1\rangle; |1\,0\rangle; |1\,1\rangle\right\}$

4.b-

$$H|0\;0\rangle = \left(-\omega S_z + \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - 3\,S_z^2\right)\right)|0\;0\rangle = 0$$

$$H|1 1\rangle = \left(-\omega S_z + \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - 3\,S_z^2\right)\right)|1\,1\rangle =$$

$$\left(-\hbar\omega + \frac{A}{2}\left(2\hbar^2 - 3\hbar^2\right)\right)|1\,1\rangle = \left(-\hbar\omega - \frac{A}{2}\hbar^2\right)|1\,1\rangle$$

$$H|1-1\rangle = \left(-\omega S_z + \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - 3\,S_z^2\right)\right)|1\,-1\rangle = \left(+\hbar\omega - \frac{A}{2}\hbar^2\right)|1\,-1\rangle$$

$$H|1 0\rangle = \left(-\omega S_z + \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - 3\,S_z^2\right)\right)|1\,0\rangle = A\hbar^2\;|1\,0\rangle$$