Université Pierre et Marie Curie

M1 PGA & SDUEE | Année 2007-08

Physique quantique appliquée

Travaux dirigés n°6 : Moments cinétiques et systèmes composites

<u>Exercice n°1 :</u>

On considère un système de moment angulaire L dans un état $|\,l\ m\rangle$.

1- Calculer $\langle \vec{L} \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$ et $\langle L_z^2 \rangle$.

2- Calculer les écarts quadratiques moyens ΔL_x, ΔL_y et ΔL_z.

<u>Exercice n°2 :</u>

Soit un système physique dont l'espace des états, à trois dimensions, est rapporté à une base de 3 vecteurs propres $|j\ m_z\rangle$ communs à J^2 et J_z ($j = 1$).

1- Ecrire la matrice des opérateurs J^2, J_x, J_y, J_z.

2- Exprimer en fonction des kets propres $|j\ m_z\rangle$ les états propres communs à J^2 et J_x que l'on note $|j\ m_x\rangle_x$.

<u>Exercice n°3 : Composition de moments cinétiques</u>

La molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène dont le spin du noyau est nul et de deux atomes d'hydrogène (discernables) dont les noyaux sont des protons de spin ½. Nous considérons que l'espace des états de spin nucléaire est le produit des espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des états de spin de chacun des protons : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.La base composée de $\mathcal{E}$ est formées des vecteurs $|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = |\varepsilon_1\rangle\,|\varepsilon_2\rangle$ où $\{|\varepsilon_k\rangle\}$ ($k = 1$ ou 2) est la base standard de l'espace $\mathcal{E}_k$.

La molécule d'eau est soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme et constant orienté suivant l'axe Oz. L'hamiltonien de ce système s'écrit :

$$H_0 = -\omega\, S_z \qquad \text{avec } S_z = S_{1z} + S_{2z}$$

1- Déterminer les valeurs propres de l'énergie ainsi que la dégénérescence de chacune de ces valeurs.

2- En réalité les deux moments cinétiques interagissent (en fait, ce sont les deux moments magnétiques qui interagissent). L'hamiltonien total s'écrit donc :

$$H = H_0 + W \qquad \text{avec } W = A\left(\vec{S}_1 \bullet \vec{S}_2 - 3\left(\vec{S}_1 \bullet \vec{e}_z\right)\left(\vec{S}_2 \bullet \vec{e}_z\right)\right)$$

Déterminer la matrice de H. Conclusion.

3.a- Vérifier que l'espace des états $\mathcal{E}$ est un espace propre des opérateurs $\vec{S}_1^{\,2}, \vec{S}_2^{\,2}, S_{1z}{}^2$ et $S_{2z}{}^2$. Préciser les valeurs propres correspondantes.

3.b- Démontrer la relation $W = \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - K\, S_z^2\right)$ où K est une constante dont on donnera la valeur.

4- On considère la base standard {|s m>} de $\mathcal{E}$.

4.a- Etablir, sans démonstration, la liste des valeurs de s, ainsi que la liste des vecteurs de la base standard.

4.b- Développer les vecteurs $(H_0 + W)\,|s\ m\rangle$ sur la base standard, en déduire le spectre de l'énergie ainsi que les vecteurs propres correspondants.