M1 PGA & SDUEE Année 2007–08

Physique quantique appliquée
Travaux dirigés n˚5. Evolution — Oscillateur harmonique

A- Evolution

Exercice 1

A l'instant initial t_0, le système est dans l'état $|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ où $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont des états propres de l'hamiltonien, H pour les valeurs propres E_1 et E_2. On suppose ici que H est indépendant du temps.
On rappelle que les vecteurs $|\psi\rangle$ et $g\,|\psi\rangle$ décrivent le même état physique ; g pouvant éventuellement varier avec le temps.

1a- On suppose la relation $E_1 = E_2$. Montrer que l'état est stationnaire, c'est à dire que toute mesure conduit aux mêmes résultats possibles quel que soit l'instant où l'on effectue la mesure (par "résultats possibles" on entend ici l'ensemble des valeurs observées, leur probabilité ainsi que l'état du système immédiatement après la mesure).

1b- On suppose $E_1 \neq E_2$. Montrer que le système physique évolue périodiquement. Exprimer la période en fonction de E_1 et E_2.

1c- Montrer que la mesure de l'énergie fournit des résultats indépendants du temps.

Exercice 2

On considère l'espace des états, $\mathcal{E}$, dont une base orthonormée est constituée par les vecteurs $|u_{k,\,j}\rangle$ qui dépendent de deux indices entiers non négatifs, k et j.
Ces vecteurs sont des vecteurs propres de l'hamiltonien H ; ils satisfont la relation $H\,|u_{k,\,j}\rangle = (k+j)\,\hbar\omega\,|u_{k,\,j}\rangle$.

2a- Montrer que le résultat d'une mesure d'énergie est nécessairement $E_n = n\hbar\omega$ où n est un entier non négatif.
Quelle est l'ordre de dégénérescence de E_n

2b- A l'instant $t = t_0$ le système est décrit par le vecteur état $|\psi_0\rangle$

$$|\psi_0\rangle = |u_{0,\,0}\rangle + (1+i)\,|u_{0,\,1}\rangle + i\,|u_{1,\,0}\rangle + (1-i)\,(|u_{0,\,2}\rangle + |u_{1,\,1}\rangle) + |u_{2,\,0}\rangle$$

Donner sans démonstration l'état du système à l'instant t, quelconque.

2c- A l'instant t on mesure l'énergie. Préciser les résultats possibles ainsi que la probabilité de chacun d'entre eux et, dans chaque cas, l'état du système immédiatement après la mesure.

B- Autour de l'oscillateur harmonique

Exercice 1

On considère une particule à une dimension de masse m évoluant dans le potentiel suivant :

$$V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

1- Rappeler l'expression de l'hamiltonien H d'un tel oscillateur harmonique.

2- On notera $|u_n\rangle$ le vecteur propre de H associé à la valeur propre E_n. On rappelle que $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega^2$ où n est un nombre entier positif ou nul.
Soient les opérateurs d'annihilation a et de création $a^\dagger$ définis comme suit :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + i\frac{P_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right\} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X - i\frac{P_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right\}$$

où X et P_x sont les opérateurs position et impulsion. On pourra poser :

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

2.a- Les opérateurs a et $a^\dagger$ sont-ils hermitiques ?

2.b- Calculer le commutateur $[a, a^\dagger]$.

2.c- Comparer l'opérateur $N = a^\dagger a$ à l'hamiltonien du système. Déterminer le résultat de l'application de N sur $|u_n\rangle$.

2.d- On rappelle que :

$$a\,|u_n\rangle = \sqrt{n}\,|u_{n-1}\rangle \quad a^\dagger\,|u_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|u_{n+1}\rangle$$

Montrer que l'on peut retrouver le résultat de la question précédente en utilisant ces relations d'applications.

3- Étude des opérateurs X et P_x.

3.a- Calculer X et P_x en fonction de a et $a^\dagger$. Calculer $X\,|u_n\rangle$ et $P_x\,|u_n\rangle$.

3.b- Déterminer les valeurs moyennes de X, de X^2 et de P_x lorsque le système se trouve dans un état propre de H.

4- A l'instant $t = 0$, l'état de cet oscillateur est donné par :

$$|\varphi(0)\rangle = \sum_n C_n\,|u_n\rangle$$

4.a- Donner $|\varphi(t)\rangle$. Déterminer, à un instant t quelconque, la probabilité $P(E_n)$ d'obtenir E_n lors de la mesure de l'énergie de cet oscillateur.

4.b- Quelle est la probabilité $P(E > 2\hbar\omega)$ pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur à un instant $t > 0$ quelconque donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$. Quels sont les coefficients C_n non nuls lorsque $P = 0$?

4.c- On suppose à partir de maintenant que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro. Écrire en fonction de C_0 et C_1 la condition de normalisation de $|\varphi(0)\rangle$ et la valeur moyenne de H. On impose de plus $< H >= \hbar\omega$. Calculer $|C_0|^2$ et $|C_1|^2$.

4.d- Le vecteur d'état $|\varphi(0)\rangle$ étant défini à un facteur de phase près, on fixe ce facteur de phase en imposant C_0 réel et positif. On pose $C_1 = |C_1|e^{i\theta}$; de plus, $< H >= \hbar\omega$ et $< x >_{t=0}= 1/2(\hbar/m\omega)^{1/2}$. Calculer θ .

4.e- Déterminer $|\varphi(t)\rangle$ ainsi que la valeur moyenne de X en fonction du temps.

Physique quantique appliquée

Travaux dirigés n°5. Evolution — Oscillateur harmonique

A- Evolution

Exercice 1

1a- $|\psi_0\rangle$ est un état propre de H pour la valeur propre $E_1 = E_2$ (que nous posons égale à E). On en déduit $|\psi_{(t)}\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi_0\rangle$. A chaque instant $|\psi_{(t)}\rangle$ et $|\psi_0\rangle$ sont proportionnels ; ils décrivent donc le même état physique. L'état $|\psi_{(t)}\rangle$ est donc stationnaire.

1b- $|\psi_{(t)}\rangle = e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}|\psi_1\rangle + e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}|\psi_2\rangle = e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}\left(|\psi_1\rangle + e^{-i(E_2-E_1)(t-t_0)/\hbar}|\psi_2\rangle\right)$.
Le même état est décrit par $|\psi_{(t)}\rangle$ et $|\varphi_{(t)}\rangle = \left(|\psi_1\rangle + e^{-i(E_2-E_1)(t-t_0)/\hbar}|\psi_2\rangle\right)$. Cet état est périodique, de pulsation $\omega = \dfrac{|E_2 - E_1|}{\hbar}$ et de période $\boxed{T = \dfrac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}}$.

1c- On pose $|\psi_{(t)}\rangle = |\psi_{E_1}\rangle + |\psi_{E_2}\rangle$ avec $|\psi_{E_1}\rangle = e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}|\psi_1\rangle$ et $|\psi_{E_2}\rangle = e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}|\psi_2\rangle$.
Une mesure de l'énergie à l'instant t donne les résultats résumés dans le tableau ci-après

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
E_1	$\dfrac{\langle\psi_{E_1}\|\psi_{E_1}\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle} = \dfrac{\langle\psi_1\|\psi_1\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle}$	$\|\psi_1\rangle$
E_2	$\dfrac{\langle\psi_{E_2}\|\psi_{E_2}\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle} = \dfrac{\langle\psi_2\|\psi_2\rangle}{\langle\psi\|\psi\rangle}$	$\|\psi_2\rangle$

On remarque que ces résultats sont indépendants du temps, que ce soit la valeur observée, la probabilité ou l'état, $|\psi_+\rangle$, après la mesure.

Exercice 2

On considère l'espace des états, $\mathcal{E}$, dont une base orthonormée est constituée par les vecteurs $|u\rangle_{k,j}$ qui dépendent de deux indices entiers non négatifs, k et j.
Ces vecteurs sont des vecteurs propres de l'hamiltonien H ; ils satisfont la relation $H\ |u_{k,\,j}\rangle = (k+j)\,\hbar\omega\,|u_{k,\,j}\rangle$.

2a- Le spectre de H est l'ensemble des valeurs $(k+j)\,\hbar\omega$. La mesure de l'énergie conduit nécessairement à l'une des valeurs $E = n\hbar\omega$ avec $n = k + j = 0, 1, 2, etc...$
Posons $k + j = n$. Une telle valeur de n peut être obtenue de diverses façons :
$n = 0 + n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) = \cdots = (n-1) + 1 = n + 0$. Il y a donc $n+1$ couples (k, j) différents qui conduisent à la même valeur E_n. A chaque couple correspond le vecteur $|u_{k,\,j}\rangle$ de la base. Le sous espace propre de E_n est donc de dimension $n+1$. La dégénérescence de E_n est donc $n+1$.

2b- A l'instant $t = t_0$ le système est décrit par le vecteur état $|\psi_0\rangle$:

$$|\psi_0\rangle = |u_{0,0}\rangle + (1+i)\,|u_{0,1}\rangle + i\,|u_{1,0}\rangle + (1-i)\,(|u_{0,2}\rangle + |u_{1,1}\rangle) + |u_{2,0}\rangle$$

On regroupe les divers vecteurs propres de H associés à la même valeur propre : $|\psi_0\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + |\psi^{(1)}\rangle + |\psi^{(2)}\rangle$ avec

$$\begin{array}{lll} & & \text{valeur propre} \\ |\psi^{(0)}\rangle = & |u_{0,0}\rangle & E_0 = 0 \\ |\psi^{(1)}\rangle = & (1+i)\,|u_{0,1}\rangle + i\,|u_{1,0}\rangle & E_1 = \hbar\omega \\ |\psi^{(2)}\rangle = & (1-i)\,(|u_{0,2}\rangle + |u_{1,1}\rangle) + |u_{2,0}\rangle & E_2 = 2\hbar\omega \end{array}$$

Cet état évolue, à l'instant t le système est décrit par le vecteur $|\psi\,(t)\rangle = |\psi^{(0)}(t)\rangle + |\psi^{(1)}(t)\rangle + |\psi^{(2)}(t)\rangle$ avec

$$\begin{array}{lll} & & \text{valeur propre} \\ |\psi^{(0)}(t)\rangle = & e^{-iE_0(t-t_0)/\hbar}\,|\psi^{(0)}\rangle & E_0 = 0 \\ |\psi^{(1)}(t)\rangle = & e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}\,|\psi^{(1)}\rangle & E_1 = \hbar\omega \\ |\psi^{(2)}(t)\rangle = & e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}\,|\psi^{(2)}\rangle & E_2 = 2\hbar\omega \end{array}$$

soit

$$\boxed{|\psi\,(t)\rangle = |u_{0,0}\rangle + e^{-i\omega(t-t_0)}\,\big((1+i)\,|u_{0,1}\rangle + i\,|u_{1,0}\rangle\big) + e^{-2i\omega(t-t_0)}\big(\,(1-i)\,(|u_{0,2}\rangle + |u_{1,1}\rangle) + |u_{2,0}\rangle\big)}$$

2c- Remarquons la relation $\langle\psi^{(k)}\,(t)\,|\psi^{(k)}\,(t)\rangle = \langle\psi^{(k)}|\psi^{(k)}\rangle$. On en déduit les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lll} \langle\psi^{(0)}|\psi^{(0)}\rangle & = & 1 \\ \langle\psi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle & = & |1+i|^2 + |i|^2 = 3 \\ \langle\psi^{(2)}|\psi^{(2)}\rangle & = & 2\,|1-i|^2 + 1 = 5 \end{array}$$

Les vecteurs $|\psi^{(k)}\,(t)\rangle$, vecteurs propres de l'observable H associés à des valeurs propres différentes, sont orthogonaux. Par conséquent $|\psi\,(t)\rangle = \sum_{k=0}^{2} |\psi^{(k)}\,(t)\rangle \Rightarrow \langle\psi\,(t)\,|\psi\,(t)\rangle = \sum_{k=0}^{2} \langle\psi^{(k)}\,(t)\,|\psi^{(k)}\,(t)\rangle = \sum_{k=0}^{2} \langle\psi^{(k)}|\psi^{(k)}\rangle$, soit $\langle\psi\,(t)\,|\psi\,(t)\rangle = 1+3+5 = 9$

Les résultats possibles d'une mesure d'énergie sont présentés dans le tableau ci-après

résultat	Proba	$\|\psi_+\rangle$
$E_0 = 0$	$\dfrac{\langle\psi^{(0)}(t)\|\psi^{(0)}(t)\rangle}{\langle\psi\,(t)\,\|\psi\,(t)\rangle} = \dfrac{1}{9}$	$\|u_{0,0}\rangle$
$E_1 = \hbar\omega$	$\dfrac{\langle\psi^{(1)}(t)\|\psi^{(1)}(t)\rangle}{\langle\psi\,(t)\,\|\psi\,(t)\rangle} = \dfrac{3}{9}$	$(1+i)\,\|u_{0,1}\rangle + i\,\|u_{1,0}\rangle$
$E_2 = 2\hbar\omega$	$\dfrac{\langle\psi^{(2)}(t) vert \psi^{(2)}(t)\rangle}{\langle\psi\,(t)\,\|\psi\,(t)\rangle} = \dfrac{5}{9}$	$(1-i)\,(\|u_{0,2}\rangle + \|u_{1,1}\rangle) + \|u_{2,0}\rangle$

B- Autour de l'oscillateur harmonique

Exercice 1

1-

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

2.a- a et $a^\dagger$ ne sont pas hermitiques (X et P_x le sont cependant), ils sont l'adjoints l'un de l'autre.

2.b- $[a, a^\dagger] = I$

2.c-

$$N = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

; donc $N\left|u_n\right\rangle = n\left|u_n\right\rangle$

2.d- $N\left|u_n\right\rangle = a^\dagger a\left|u_n\right\rangle = a^\dagger\sqrt{n}\left|u_{n-1}\right\rangle = n\left|u_n\right\rangle$

3.a-

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad P_x = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}(a - a^\dagger)$$

$$X\left|u_n\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\left|u_{n-1}\right\rangle + \sqrt{n+1}\left|u_{n+1}\right\rangle\right)$$

$$P_x\left|u_n\right\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\left(\sqrt{n}\left|u_{n-1}\right\rangle - \sqrt{n+1}\left|u_{n+1}\right\rangle\right)$$

3.b-

$$< X >= 0 \quad < P_x >= 0$$

$$< X^2 >= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(2n+1) \quad < P_x^2 >= \frac{1}{2}m\hbar\omega(2n+1)$$

D'où

$$< E_p >= \frac{1}{2}m\omega^2 < X^2 >= \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{E_n}{2}$$

$$< E_c >= \frac{< P_x^2 >}{2m} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{E_n}{2}$$

4.a-

$$\left|\phi(t)\right\rangle = \sum_n C_n e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\left|u_n\right\rangle = \sum_n C_n e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t}\left|u_n\right\rangle$$

$$\mathcal{P}(E_n) = \frac{\left|C_n e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\right|^2}{\sum_p\left|C_p e^{-\frac{iE_pt}{\hbar}}\right|^2} = \frac{\left|C_n\right|^2}{\sum_p\left|C_p\right|^2}$$

$\mathcal{P}(E_n)$ ne dépend pas du temps.

4.b- $E_n > 2\hbar\omega \Leftrightarrow n \geq 2$

$$\mathcal{P}(E > 2\hbar\omega) = \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left|C_n\right|^2}{\sum_n\left|C_n\right|^2} = 1 - \frac{\left|C_0\right|^2 + \left|C_1\right|^2}{\sum_n\left|C_n\right|^2}$$

Si $\mathcal{P}(E > 2\hbar\omega)$ est nul alors tous les $|C_n|^2$ sont nuls pour $n \geq 2$ et au moins un des coefficients $|C_0|^2$ et $|C_1|^2$ est non nul.

4.c- On suppose que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro. On a donc $|\varphi(0)\rangle = C_0 |u_0\rangle + C_1 |u_1\rangle$. La condition de normalisation de $|\varphi(0)\rangle$ donne $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$.
Et la valeur moyenne de H : $< H >= \mathcal{P}_0 E_0 + \mathcal{P}_1 E_1 = \left(\frac{|C_0|^2}{2} + \frac{3|C_1|^2}{2}\right)\hbar\omega$
On impose de plus $< H >= \hbar\omega$. Donc $|C_0|^2 = |C_1|^2 = \frac{1}{2}$.

4.d- C_0 est réel et positif donc : $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $C_1 = \frac{e^{i\theta}}{2}$.

$$< X >_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\langle a\rangle_{t=0} + \langle a^\dagger\rangle_{t=0}\right)$$

$$\langle a\rangle_{t=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_0| + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle u_1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a|u_0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}a|u_1\rangle\right) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$$

et

$$\langle a^\dagger\rangle_{t=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_0| + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle u_1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger|u_0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}a^\dagger|u_1\rangle\right) = \frac{1}{2}e^{-i\theta}$$

Au final :

$$< X >_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\theta$$

$$< X >_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

. On choisit $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(\frac{3\omega t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}|u_1\rangle$$

4.e-

$$\langle X\rangle_t = \langle\varphi(t)|X|\varphi(t)\rangle = \left\langle \varphi(t)|\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)|\varphi(t)\right\rangle$$

$$\langle X\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(\frac{3\omega t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\omega t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$\langle X\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$