

Physique quantique appliquée

Travaux dirigés n°10 : Structure hyperfine de l'atome d'Hydrogène en présence d'un champ magnétique extérieur

En plus du couplage spin-orbite $\vec{L} \cdot \vec{S}$ et des autres corrections relativistes, existe un couplage entre le spin électronique \vec{S} d'un atome et son spin d'origine nucléaire \vec{I} . L'Hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_1 = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S} \cdot \vec{I}$$

avec $A = 5,87.10^{-6}$ eV, et conduit à une structuration "hyperfine" des niveaux énergétiques E_{nLS} d'un atome multiélectronique.

On considère par la suite un atome d'Hydrogène dans son état fondamental $1s$ ($n = 1, L = 0$) dont l'énergie est notée simplement E_0 .

1 - Quel est le degré de dégénérescence de E_0 si on néglige H_1 ? (on rappelle que le spin du proton vaut $I = 1/2$)

2 - Structure hyperfine Comment se simplifie l'expression $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ pour l'état $1s$?

Construire la base standard $|F, m_F\rangle$ de l'opérateur moment cinétique total $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ à partir des vecteurs de la base composée de \vec{S} et \vec{I} (aide : $|1, 0\rangle = (|+-\rangle + |-+\rangle) / \sqrt{2}$).

Donner ensuite l'effet de H_1 sur les niveaux énergétiques correspondants.

La dégénérescence de la question 1. est-elle levée?

AN : Donner la longueur d'onde associée à l'écart énergétique entre l'état "triplet" et l'état "singulet".

Sachant que le milieu interstellaire est composé principalement d'Hydrogène atomique et que la température des nuages interstellaires est suffisante pour induire des transitions entre les 2 états hyperfins $F = 1$ et $F = 0$, conclure sur l'importance de la "raie à 21 cm de l'Hydrogène" en astrophysique.

3 - Champ magnétique extérieur On place cet atome d'Hydrogène - dans son état fondamental $1s$ - dans un champ magnétique extérieur \vec{B} .

Exprimer l'Hamiltonien de "couplage magnétique" H_B en fonction des moments magnétiques orbital \vec{M}_L , de spin électronique \vec{M}_S et de spin nucléaire \vec{M}_I ; puis en fonction de \vec{L} , \vec{S} et \vec{I} et de $\omega_0 = -\frac{q}{2m_e}B$ et $\omega_N = \frac{q}{2M_p}g_p B$, où g_p est le facteur de Landé nucléaire du proton ($g_p = 5,58$).

Quel est l'effet du terme dépendant de \vec{L} dans le cas présent? De même, que déduisez vous du rapport ω_N/ω_0 pour l'expression de H_B ?

4 - Effet Zeeman On suppose que l'intensité du champ magnétique \vec{B} est faible de telle sorte que H_B puisse être considéré comme une perturbation de l'Hamiltonien H_1 .

Donner les corrections aux niveaux énergétiques obtenus à la question 2. de 2 façons différentes :

4.1) en s'aidant des vecteurs de la base standard $|F, m_F\rangle$ établis à la question 2.

4.2) en utilisant le théorème de Wigner-Eckart pour exprimer S_z en fonction de F_z .

Y-a-t-il levée de dégénérescence?

Tracer l'allure des courbes représentant les niveaux d'énergie en fonction de ω_0 .

Facultatif : Le niveau $F = 0$ est-il dégénéré? Est-il déplacé par le champ \vec{B} ?

Donner l'effet Zeeman du second ordre pour le niveau $F = 0$.

Dans le cas général, si le niveau $F = 0$ est le niveau fondamental de l'atome, quel est le signe du déplacement énergétique du second ordre?

5 - Effet Paschen-Back On suppose maintenant le cas opposé, i.e. que l'intensité du champ magnétique \vec{B} est suffisamment forte pour que H_1 puisse être considéré comme une perturbation de l'Hamiltonien H_B . Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de H_B ? Y-a-t-il dégénérescence ?

Traiter H_1 en perturbation et montrer que la correction au premier ordre est proportionnelle à $m_l.m_s$.

La dégénérescence est-elle levée ?

Tracer l'allure des courbes représentant les niveaux d'énergie en fonction de ω_0 .

6 - Facultatif : Cas intermédiaire où les effets de H_B et H_1 sont du même ordre En utilisant l'expression des vecteurs de la base standard $|F, m_F\rangle$ de la question 2., donner la matrice représentant $H_B + H_1$ dans la base $|F, m_F\rangle$. En déduire les vecteurs propres et énergies propres du système lorsque le champ \vec{B} est quelconque.

Tracer l'allure des courbes représentant les niveaux d'énergie en fonction de ω_0 , et retrouver les résultats des questions 4. et 5. pour $\omega_0 \rightarrow 0$ et $\omega_0 \rightarrow +\infty$.

Quel est, selon vous, l'intérêt de ces effets en astrophysique pour l'étude des nuages interstellaires ?

