Université Pierre et Marie Curie

M1 PGA & SDUEE Année 2007–08

Physique quantique appliquée

Epreuve du 9 novembre 2007
Durée : 2 heures

Aucun document ni calculette autorisé

A- Le formalisme

Exercice 1

L'espace des états est muni d'une base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. On pose $|\varphi\rangle = (1+i)\,|u_1\rangle + |u_2\rangle$, $|\theta\rangle = i\,|u_2\rangle + (1-i)\,|u_3\rangle$ et $|\psi\rangle = |\varphi\rangle + 2\,|\theta\rangle$.

1a- Calculer les produits scalaires suivants : $\langle\varphi\,|\varphi\rangle$, $\langle\varphi\,|\theta\rangle$, $\langle\theta\,|\varphi\rangle$ et $\langle\psi\,|\psi\rangle$

1b- Les vecteurs $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$ sont représentés par les matrices suivantes : $|u_1\rangle \to \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $|u_2\rangle \to \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ et $|u_3\rangle \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Donner la représentation matricielle des kets $|\varphi\rangle$ et $|\theta\rangle$ et des bras $\langle\varphi|$ et $\langle\theta|$.

1c- L'opérateur A est défini par les relations $A\,|u_1\rangle = a\,|u_2\rangle$, $A\,|u_2\rangle = a\,|u_1\rangle$ et $A\,|u_3\rangle = a\,|u_3\rangle$ où a est un nombre réel.

Donner la représentation matricielle de A dans la représentation précédente. L'opérateur A est-il hermitique ?

Exprimer le ket $A\,|\varphi\rangle$ en fonction des vecteurs de base $|u_k\rangle$.

1d- Montrer que les kets $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + |u_2\rangle\right)$, $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_2\rangle\right)$ et $|u_3\rangle$ sont vecteurs propres de l'opérateur A.

Quelles sont les valeurs propres associées et leurs degrés de dégénérescence ?

Le système physique est dans l'état $|\theta\rangle$. Quels sont les résultats et les probabilités d'une mesure associée à l'opérateur A ?

B- Autour de l'oscillateur harmonique

Exercice 2 : Evolution temporelle d'un système

On rappelle les résultats suivants concernant l'oscillateur harmonique à une dimension :

Etats propres, normalisés, de l'énergie : $|u_n\rangle$, Energie associée : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

Relations de récurrence : $a\,|u_n\rangle = \sqrt{n}\,|u_{n-1}\rangle$ et $a^\dagger\,|u_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|u_{n+1}\rangle$

Opérateur de position : $x = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right)$ avec $\sigma = \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{k}} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$

A l'instant $t = 0$ l'oscillateur est dans l'état $|\psi_0\rangle = \cos\theta \ |u_0\rangle + \sin\theta \ |u_1\rangle$ où θ est un angle donné.

2a- Donner, sans démonstration, le vecteur état, $|\psi_t\rangle$, à l'instant t quelconque.

2b- Donner l'expression du bra $\langle\psi_t|$ ainsi que la valeur de $\langle\psi_t\,|\psi_t\rangle$.

2c- Donner l'expression de $|\phi\rangle = x\,|\psi_t\rangle$. Donner la valeur de $\langle\psi_t\,|\phi\rangle$; en déduire la valeur moyenne $\langle x\rangle = \dfrac{\langle\psi_t|\,x\,|\psi_t\rangle}{\langle\psi_t\,|\psi_t\rangle}$

2d- Calculer $\langle\phi\,|\phi\rangle$ en déduire la valeur moyenne de x^2.

2e- Déduire de ce qui précède l'indétermination Δx, sur la variable x.

2f- Pour observer une éventuelle perturbation on effectue des mesures de position à certains instants "bien choisis". Quels sont ces instants ? Quel est l'intérêt de telles mesures "stroboscopiques".

C- Moment cinétique

Exercice 3 : Neutron dans un champ magnétique

On considère une particule neutre de spin 1/2 plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ orienté selon l'axe Oz. L'hamiltonien de l'interaction magnétique s'écrit :

$$H_0 = -\gamma B S_z = \omega S_z$$

On suppose $\omega > 0$. A l'instant $t = 0$, le neutron est dans l'état :

$$|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

où $|+\rangle$ et $|-\rangle$ désignent les états propres de S_z avec les valeurs propres $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$ respectivement. On donne les matrices de spin dans cette base :

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

3a- Calculer les valeurs moyennes des observables S_x, S_y et S_z dans cet état.

3b- Donner $|\phi(t)\rangle$, le vecteur d'état du neutron à l'instant t.

3c- En déduire la valeur moyenne de S_x à l'instant t : $\langle S_x\rangle = \langle\phi(t)|S_x|\phi(t)\rangle$.

3d- Appliquer le théorème d'Ehrenfest aux observables S_x, S_y et S_z pour un état $|\psi(t)\rangle$ quelconque. Intégrer ces équations et en déduire les lois d'évolution temporelle des valeurs moyennes de ces observables dans l'état $|\psi(t)\rangle$. On fixera alors les constantes d'intégration en prenant comme état du système à $t = 0$ l'état $|\phi(0)\rangle$. Retrouver le résultat de la question **3c**.

Université Pierre et Marie Curie

M1 PGA & SDUEE Année 2007–08

Physique quantique appliquée

Epreuve du 9 novembre 2007
Durée : 2 heures

Aucun document ni calculette autorisé

A- Le formalisme

Exercice 1

1a- $\langle \varphi | \varphi \rangle = 3$, $\langle \varphi | \theta \rangle = i$, $\langle \theta | \varphi \rangle = -i$ et $\langle \psi | \psi \rangle = 15$

1b- $|\varphi\rangle = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|\theta\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1-i \end{bmatrix}$, $\langle\varphi| = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$, $\langle\theta| = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1+i \end{bmatrix}$

1c-

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

L'opérateur A est hermitique car a est réel.
$A\,|\varphi\rangle = a\,|u_1\rangle + a(1+i)\,|u_2\rangle$.

1d- $A\,|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A\,|u_1\rangle + A\,|u_2\rangle\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_1\rangle\right) = a\,|v_1\rangle$
$A\,|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A\,|u_1\rangle - A\,|u_2\rangle\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(a\,|u_2\rangle - |u_1\rangle\right) = -a\,|v_2\rangle$
$A\,|u_3\rangle = a\,|u_3\rangle$.

Les valeurs propres sont a, de dégré de dégénérescence égal à deux, et $-a$ non dégénérée.
$|\theta\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\,|v_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|v_2\rangle + |u_3\rangle$.

résultat	proba	$\|\psi_+\rangle$
a	$\frac{5}{6}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}\,\|v_1\rangle + (1-i)\,\|u_3\rangle$
$-a$	$\frac{1}{6}$	$\|v_2\rangle$

B- Autour de l'oscillateur harmonique

Exercice 2 : Evolution temporelle d'un système

2a- $|\psi_t\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}\cos\theta\ |u_0\rangle + e^{-iE_1t/\hbar}\sin\theta\ |u_1\rangle$ avec $E_1 - E_0 = \hbar\omega$. On en déduit $\boxed{|\psi_t\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}\left(\cos\theta\ |u_0\rangle + e^{-i\omega t}\sin\theta\ |u_1\rangle\right)}$. L'état du système peut aussi bien nêtre décrit par le ket $|\chi\rangle = \cos\theta\ |u_0\rangle + e^{-i\omega t}\sin\theta\ |u_1\rangle$ qui est proportionnel à $|\psi_t\rangle$.

2b- $\boxed{\langle\psi_t| = \left(\langle u_0|\cos\theta + \langle u_1|\sin\theta e^{i\omega t}\right) e^{iE_0t/\hbar}}$ En utilisant l'orthonormalisation de la base, il vient $\boxed{\langle\psi_t|\psi_t\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$. La norme est indépendante du temps !

2c- $|\phi\rangle = x|\psi_t\rangle = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right)\left(e^{-iE_0t/\hbar}(\cos\theta\ |u_0\rangle + e^{-i\omega t}\sin\theta\ |u_1\rangle)\right)$. Les relations de récurrence donnent

$$\boxed{|\phi\rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{-iE_0t/\hbar}\left(e^{-i\omega t}\sin\theta\,|u_0\rangle + \cos\theta\ |u_1\rangle + \sqrt{2}e^{-i\omega t}\sin\theta\ |u_2\rangle\right)}$$

$\langle\psi_t|\phi\rangle = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\sin\theta\ \cos\theta + \sin\theta\ \cos\theta\ e^{i\omega t}\right)$ $\quad \langle\psi_t|\phi\rangle = \boxed{\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin(2\theta)\ \cos(\omega t) = \langle x\rangle}$

2d- $\langle\phi| = \langle\psi_t|\,x$ car $x^\dagger = x$. On en déduit

$\langle\phi|\phi\rangle = \boxed{\langle x^2\rangle = \dfrac{\sigma^2}{2}\left(3\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}$

2e- $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ d'où $\Delta x^2 = \dfrac{\sigma^2}{2}\left(3\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - \dfrac{\sigma^2}{2}\sin^2 2\theta\ \cos^2\omega t$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\sin^2\theta - \sin^2 2\theta \times \cos^2\omega t}}$$

2f- La détermination de la position est maximale pour Δx minimal soit $\omega t = N\pi$ où $N \in \mathbb{N}$. Les meilleurs instants pour faire la mesure sont $\boxed{t_N = \dfrac{N\pi}{\omega}}$ Dans ces conditions on a $\boxed{\Delta x = \Delta x_{\text{mini}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\sin^2\theta - \sin^2 2\theta}}$

La valeur de θ peut être choisie de telle sorte que Δx_{mini} soit minimal ($\theta = \pm\dfrac{\pi}{6} + N\pi$). Dans ces conditions il vient $\Delta x_{\text{mini}} \sim 0,6\ \sigma$ tandis que le cas $\theta = \pi/2$ conduit à doubler Δx

C- Moment cinétique

Exercice 3 : Neutron dans un champ magnétique

3a-

$$\langle S_x\rangle = \langle\phi(0)|S_x|\phi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[S_x\,|+\rangle + S_x\,|-\rangle\right] = \frac{\hbar}{4}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[|-\rangle + |+\rangle\right]$$

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{4}\left(\langle +|+\rangle + \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{\hbar}{4}(1 + 0 + 0 + 1) = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle S_y\rangle = \langle\phi(0)|S_y|\phi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[S_y\,|+\rangle + S_y\,|-\rangle\right] = \frac{\hbar}{4}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[-i\,|-\rangle + i\,|+\rangle\right]$$

$$\langle S_y\rangle = \frac{i\hbar}{4}\left(\langle +|+\rangle - \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle - \langle -|-\rangle\right) = \frac{i\hbar}{4}(1 - 0 + 0 - 1) = 0$$

$$\langle S_z\rangle = \langle\phi(0)|S_z|\phi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[S_z\,|+\rangle + S_z\,|-\rangle\right] = \frac{\hbar}{4}\left[\langle +| + \langle -|\right]\left[|+\rangle - |-\rangle\right]$$

$$\langle S_z\rangle = \frac{i\hbar}{4}\left(\langle +|+\rangle - \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle - \langle -|-\rangle\right) = \frac{i\hbar}{4}(1 - 0 + 0 - 1) = 0$$

3b- $|+\rangle$ est vecteur propre de H d'énergie propre $E_+ = \frac{\hbar\omega}{2}$.
$|-\rangle$ est vecteur propre de H d'énergie propre $E_- = -\frac{\hbar\omega}{2}$.
Donc :

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle$$

3c-

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle_t &= \langle \phi(t)|S_x|\phi(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{\frac{i\omega t}{2}} \langle +| + e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle -|\right]\left[e^{-\frac{i\omega t}{2}} S_x |+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}} S_x |-\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{4}\left[e^{\frac{i\omega t}{2}} \langle +| + e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle -|\right]\left[e^{-\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{4}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\cos\omega t
\end{aligned}$$

3d-

$$\frac{\mathrm{d}\langle S_x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\langle [S_x, H]\rangle + \left\langle \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{\omega}{i\hbar}\langle [S_x, S_z]\rangle = -\omega\langle S_y\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle S_y\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\langle [S_y, H]\rangle + \left\langle \frac{\mathrm{d}S_y}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{\omega}{i\hbar}\langle [S_y, S_z]\rangle = \omega\langle S_x\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle S_z\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\langle [S_z, H]\rangle + \left\langle \frac{\mathrm{d}S_z}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{\omega}{i\hbar}\langle [S_z, S_z]\rangle = 0$$

On obtient l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2\langle S_x\rangle}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\langle S_x\rangle = 0$$

dont la solution générale est :

$$\langle S_x\rangle_t = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Dans le cas particulier ou le système est dans l'état $|\phi(0)\rangle$ à l'instant $t = 0$ on a les conditions limites :

$$A = \langle S_x\rangle_{t=0} = \frac{\hbar}{2}$$

et

$$\langle S_y\rangle_{t=0} = 0 = -\frac{1}{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\langle S_x\rangle}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -B$$

Donc on retrouve bien :

$$\langle S_x\rangle_t = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t$$