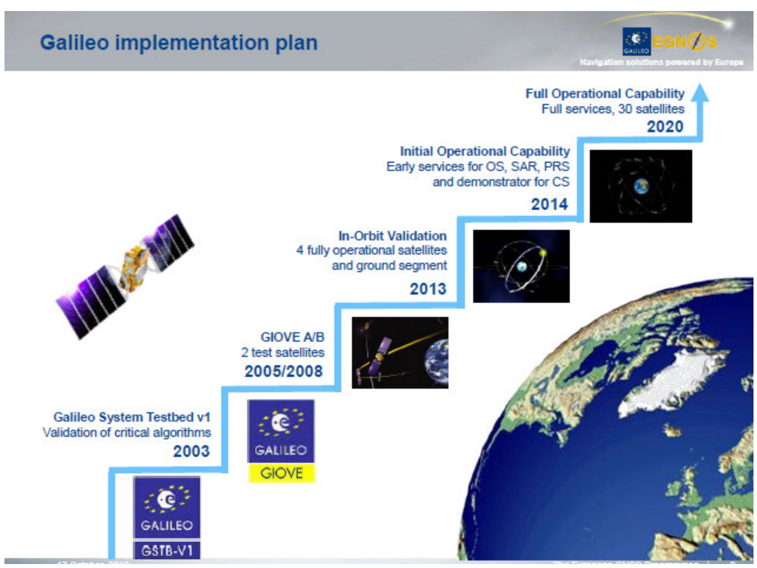
MASTER 1ère ANNEE
Physique des satellites et du positionnement
Le système Galileo

Contrôle continu à rendre pour le lundi 05 mars 2018

Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les mêmes que dans le cours. Les différentes parties du problème sont indépendantes.
Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.

Galileo est un projet européen de système de positionnement par satellites (radionavigation), destiné à supprimer la dépendance de l'Europe en matière spatiale, et notamment vis-à-vis du système américain, le GPS (Global Positioning System).
En test depuis fin 2005 à la suite des lancements des deux satellites Giove-A et Giove-B en décembre 2005 et avril 2008, les deux premiers satellites de la constellation ont été lancés le 21 octobre 2011. A l'heure actuelle, huit satellites sont en orbite. Au final, il est prévu de mettre 30 satellites en orbite.
Le principe de la mesure de positionnement est globalement identique à ce qui est pratiqué pour la constellation GPS et, sur les trois bandes de fréquence utilisées par Galileo, une est commune avec GPS.
Les satellites possèdent à leur bord quatre horloges atomiques : deux horloges à Rubidium et deux masers passifs.



Les données numériques du problème sont :

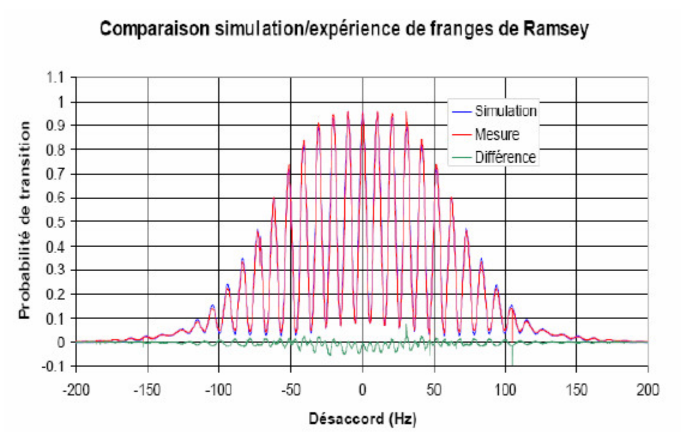
$$\begin{aligned} R_T &= 6378 \text{ km} \\ Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\ c &= 299792458 \text{ m.s}^{-1} \\ \nu_{Cesium} &= 9192631770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Césium)} \\ \nu_{Rubidium} &= 6834682611 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Rubidium)} \end{aligned}$$

où R_T est le rayon terrestre, Gm est le paramètre gravitationnel standard de la Terre, et c est la vitesse de la lumière.

A - Choix de l'horloge et performances

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge atomique, que signifie en physique quantique le fait que l'oscillateur soit en résonance avec les atomes de référence ?
2. Décrire le principe des oscillations de Rabi. Quel paramètre physique détermine la largeur de la raie d'interaction ? Pourquoi est-ce difficile d'obtenir des mesures de grande précision avec une interaction unique ?
3. Un prototype d'horloge au sol a été élaboré pour préparer une mission spatiale. En sortie de cette horloge, on observe les franges ci-dessous.



   Quel processus physique permet d'obtenir de telles franges ? Pourquoi l'enveloppe des franges est-elle en forme de cloche ?

4. Déterminer le temps d'interrogation des atomes pour le prototype d'horloge étudié dans la question précédente. Comment ce temps d'interrogation peut-il être modifié si une horloge analogue adaptée est satellisée ?
5. Afin de choisir quel type d'horloge devrait voler pour Galileo, il a été utile de comparer les performances de deux fontaines existantes au sol : une ayant pour référence des atomes de Césium et une se servant d'atomes de Rubidium. Les exactitudes en fonction des phénomènes perturbatifs de ces deux horloges sont données dans le tableau ci-dessous.

	Fontaine au Césium		Fontaine au Rubidium	
Effet	Correction relative (x10^{-16})	Incertitude relative (x10^{-16})	Correction relative (x10^{-16})	Incertitude relative (x10^{-16})
Effet Zeeman quadratique	-1914	0,3	-3468	0,7
Radiation de corps noir	167,2	0,6	120,6	1,6
Collisions	246	2,5	8,4	1
Effet Doppler du premier ordre	0	3	0	2,5
Pureté spectrale	0	0,5	0	0,5
Autres	0	2	0	2

Déterminer les corrections totales relatives et absolues à appliquer sur les deux horloges ainsi que les incertitudes globales associées.

6. Quel est l'effet physique associé à la ligne du tableau intitulée "Doppler" ? Pourquoi a-t-on un déplacement nul et une incertitude non-nulle ?
7. Comparer les performances des deux horloges et discuter des avantages et des inconvénients des deux systèmes en justifiant vos arguments.

   Au final, il a été décidé, ainsi que cela est dit en introduction, que chaque satellite dispose à bord de deux horloges à Rubidium (Rubidium Atomic Frequency Standard ou RAFS) et deux masers passifs (Passive Hydrogen Maser ou PHM).


Figure 1. RAFS flight model.

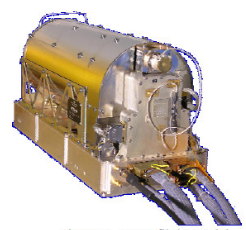
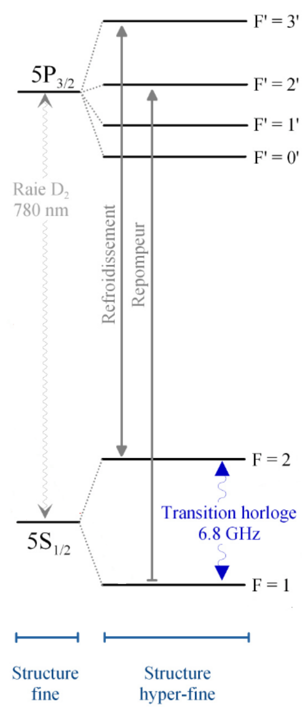
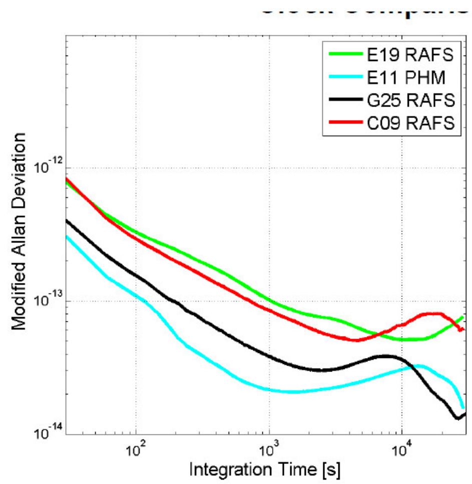


Figure 2. PHM flight model.

L'atome de rubidium a un électron de valence et sa structure atomique présente beaucoup de similarités avec celle du césium. Le diagramme ci-dessous montre quelques-uns des états de cet atome :



8. Donner les nombres quantiques des deux niveaux hyper-fins $5^2S_{1/2}, F = 2$ et $5^2P_{3/2}, F = 3$ ainsi que leurs degrés de dégénérescence. (Pour chacun de ces niveaux, il doit y avoir 6 nombres quantiques plus 1 correspondant à la dégénérescence).
9. Les performances des horloges RAFS et PHM en terme de stabilité ont été mesurées en situation dans les premiers satellites Giove mis en orbite à partir de 2005. La variance d'Allan des horloges a été estimée en fonction du temps de mesure, donnant les courbes ci-dessous.



Comparer les performances des différentes horloges RAFS et PHM étudiées.

10. Galileo propose différents services correspondant à des codes répartis sur plusieurs bandes de fréquence allant de 1164 à 1610 MHz. Suivant les positions des satellites Galileo, le signal de positionnement va traverser diverses parties de l'atmosphère terrestre. A partir des caractéristiques de l'ionosphère (à partir des documents distribués), démontrer que les fréquences de Galileo peuvent se propager à travers l'ionosphère.

B - Orbite

1. La période des satellites Galileo est d'environ 14h05mn. On considère qu'ils suivent une orbite circulaire. Calculez l'altitude et la vitesse d'un satellite de la constellation.
2. On se place dans le cadre de la relativité générale. Dans le système de référence GCRS la métrique s'exprime :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}T^2 + \left(1 + \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)\delta_{ij}\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^j \tag{2}$$

On suppose que $W(T,\boldsymbol{X}) = Gm/R$, avec $R = \delta_{ij}X^iX^j$.

(a) Quelle est la relation entre temps propre et temps coordonnée, $(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}T)$, développée à l'ordre $1/c^2$?

(b) Donner la relation formelle $(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}T)$ dans le cas d'un satellite Galileo ; dans le cas d'une horloge située à la surface de la Terre, fixe par rapport à celle-ci et à une latitude de 43 degrés.

(c) Quelle est la différence de fréquence relative (théorique) entre une horloge Galileo et l'horloge au sol considérée précedemment ? Donner une valeur numérique.

(d) Le système Galileo permet de comparer les horloges du satellite et l'horloge sol considérée avec une exactitude de l'ordre de la nanoseconde. Au bout de combien de temps peut-on détecter la correction relativiste ?