Master de Physique 1ère année
Physique des satellites et du positionnement
M.C. Angonin, P. Delva, B. Fang et R. Geiger

TD Signaux

1. Effet Doppler : a- Déterminer l'expression de l'effet Doppler en fonction de l'angle entre le vecteur vitesse du satellite et la ligne de visée.
b- Si l'effet Doppler transverse est compensé par un ajustement de la fréquence d'horloge, sur quelle gamme de fréquence le signal de la porteuse varie-t-il ?
c- On suppose que la mesure dure 20 ms (caractéristique des données de navigation), déterminer l'erreur en position issue de l'effet Doppler.

2. Ambiguïtés, ordres de grandeur : Le code C/A est répété toutes les millisecondes, le code P est réinitialisé une fois par semaine. Le récepteur fait une mesure en effectuant une autocorrélation entre le signal reçu et une réplique locale du signal émis par le satellite.
a- Une mesure effectuée avec un de ces codes peut-elle être ambigue ?
b- Même question pour des mesures effectuées avec les fréquences porteuses :
$f_1 = 1575,42$ MHz et $f_2 = 1227,60$ MHz.

3. Combinaison de signaux "ionosphere free" : Le principe de la mesure de phase Φ est de comparer la phase du signal reçue par le récepteur avec la phase du signal générée par le récepteur qui est une réplique du signal émis par le satellite. Le récepteur reçoit à l'instant t_R la phase du signal émise par le satellite à l'instant t_E. On peut exprimer cette mesure en distance en multpliant par la longueur d'onde λ :

$$L = c(t_R - t_E) = \lambda \frac{\Phi}{2\pi} = \ell_{géom} + \lambda N + \delta L_{iono} + \delta \ell$$

où $\ell_{géom}$ est la distance géométrique entre le satellite et le récepteur que l'on cherche à déterminer, λN représente les ambiguïtés de mesure (N entier), δL_{iono} est la contribution de l'ionosphère sur la propagation du signal, $\delta \ell$ englobe l'ensemble des bruits et décalages issus des autres contributions au signal (troposphère, horloges, bruits détecteurs, relativité, etc.)
a- On rappelle que l'ionosphère est dispersive et que son indice de réfraction en fonction de la fréquence s'écrit :

$$n_{iono} = 1 + \frac{k}{f^2}$$

avec k coefficient caractéristique de l'état de l'ionosphère (dépendant de la densité d'électrons).
Exprimer δL_{iono} en fonction de la fréquence.
b- Montrer qu'avec deux fréquences différentes, il est possible de construire une combinaison linéaire des deux signaux détectés simultanément pour laquelle la contribution de l'ionosphère a été éliminée.

Master de Physique 1ère année
Physique des satellites et du positionnement
M.C. Angonin, P. Delva, B. Fang et R. Geiger

TD Signaux

Correction sommaire

1. Effet Doppler :

a- Avec les effets relativistes, on a :

$$\nu_r = \frac{\nu_e}{\gamma\,(1+\beta\cos\theta)}$$

avec θ angle entre la vitesse et la ligne de visée et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \dfrac{v_{sat}}{c}$ pour un satellite à la vitesse v_{sat} par rapport au récepteur.

b- Si l'effet Doppler transverse est compensé par un réglage de l'horloge, alors la fréquence émise est $\nu'_e = \dfrac{\nu_e}{\gamma}$. Il ne reste plus que l'effet Doppler classique du premier ordre en β.
$\nu_r = \nu'_e\,(1 \pm \beta\cos\theta)$
Le maximum de cet effet se produit lorsque le satellite est à l'horizon pour le récepteur : $z = \pm\pi/2$ avec z angle de position du satellite avec le zénith.
Comme le récepteur est sur le sol (rayon équatorial : 6378 km) et que les satellites sont au premier ordre sur des orbites circulaires de rayon : $20200 + 6378 = 26578$ km,
l'angle entre le vecteur vitesse du satellite (tangent à l'orbite) et la ligne de visée vaut alors :
$\theta = \arccos\dfrac{6378}{26578} = 1.327\,6 * 180/\pi = 76°$
La vitesse du satellite sur son orbite est donnée par le rayon (voir TD 1) : $v_{sat} = 3872$ m/s
L'effet Doppler relatif vaut donc :$\dfrac{\delta\nu}{\nu} = \pm\beta\cos(1,3276) = \pm\dfrac{3872}{2.99\times10^8}\cos(1.3276) = \pm 3.0\times10^{-6}$
Pour une fréquence de porteuse $f = 1,5$ GHz, l'effet Doppler vaut : $\delta\nu = \pm 3.0\times10^{-6}\times 1.5\times10^9 = 4.5$ kHz
Dans les faits, l'effet est doublé par tous les effets qui ne sont pas pris en compte dans ce calcul approximatif : rotation de la Terre, vitesse de déplacement du récepteur, écart à la circularité de l'orbite du satellite, etc. On peut donc estimer que : $\delta\nu \approx 10$ kHz
c- En 20 ms, l'erreur induite sur la mesure est de : $\delta t = 3.0\times10^{-6}\times 20\times10^{-3} = 6.0\times10^{-8}$ s
Soit une erreur en distance de 18 m (ou le double si on prend en compte toutes les contributions).

2. Ambiguïtés :

a- Si l'on devait scanner l'ensemble des codes de tous les satellites, le code P aurait une périodicité totale de $266,7$ jours. Cela correspond à $266.7 \times 24 \times 3600 \times 3 \times 10^5 = 7 \times 10^{12}$ km. Tant que l'on reste sur Terre, il n'y a pas d'ambiguïté. En réalité, ce code est implémenté sur les satellites en tranches de 1 semaine. Même dans le cas improbable où cette implémentation pourrait induire une ambiguïté, elle correspondrait à : $7 \times 24 \times 3600 \times 3 \times 10^5 = 2 \times 10^{11}$ km. Il n'y a pas non plus d'ambiguïté.
Le code C/A a une périodicité de 1 ms. Cela correspond à 300 km. L'ambiguïté existe, mais il est raisonnable de penser que le récepteur sait a priori où il se trouve à 300 km près et qu'il est capable de lever cette ambiguïté en donnant par exemple une première estimation de la position.
On peut noter que la taille des "chips" de ces codes correspondent à $1,023$ Mbps (code C/A soit 293 m) et $10,23$ Mbps (code P soit $29,3$ m), mais comme les codes sont pseudo-aléatoires, cela n'induit pas d'ambiguïté. Par contre, ces valeurs donnent une contrainte sur la précision de la mesure qui peut être estimée à quelques % de la taille d'un chip.
b- les fréquences porteuses ont des longueurs d'onde respectivement de : $\boldsymbol{\lambda}_1 = 3 \times 10^8 \times 10^{-6}/1575.42 = 19$ cm et $\boldsymbol{\lambda}_1 = 3 \times 10^8 \times 10^{-6}/1227,60 = 24,4$ cm. Il y a clairement ambiguïté qui ne peut être levée que par des mesures différentielles redondantes.

3. Combinaison de signaux "ionosphere free" :

$$L = c(t_R - t_E) = \lambda \frac{\Phi}{2\pi} = \ell_{géom} + \lambda N + \delta L_{iono} + \delta\ell$$

a- $\delta L_{iono} = \int_{iono} (n_{iono} - 1)\, d\ell = \dfrac{\int_{iono} k d\ell}{f^2} = \dfrac{A}{f^2}$
On peut remarquer que cette expression est un effet calculé à l'ordre le plus faible. Il existe des effets d'ordres supérieurs.
b- Avec deux fréquences différentes, on a deux mesures simultanées :

$$L_1 = \lambda_1 \frac{\Phi_1}{2\pi} = \ell_{géom} + \lambda_1 N_1 + \frac{A}{f_1^2} + \delta\ell$$

$$L_2 = \lambda_2 \frac{\Phi_2}{2\pi} = \ell_{géom} + \lambda_2 N_2 + \frac{A}{f_2^2} + \delta\ell$$

En combinant les signaux de phase, il est donc possible d'éliminer l'effet ionosphérique :

$$f_2 \frac{\Phi_2}{2\pi} - f_1 \frac{\Phi_1}{2\pi} = \frac{1}{c}\left[\left(f_2^2 - f_1^2\right)\left(\ell_{géom} + \delta\ell\right) + A - A\right] + f_2 N_2 - f_1 N_1$$

$$\frac{\lambda_1}{\frac{f_2^2}{f_1^2} - 1}\left(\frac{f_2}{f_1}\frac{\Phi_2}{2\pi} - \frac{\Phi_1}{2\pi}\right) = \ell_{géom} + \delta\ell + \frac{\lambda_1}{\frac{f_2^2}{f_1^2} - 1}\left(\frac{f_2}{f_1}N_2 - N_1\right)$$

Cette combinaison de signaux ne dépend pas au premier ordre des effets ionosphériques. On peut remarquer que cette combinaison correspond à un nombre non-entier d'ambiguïtés, ce qui peut être aussi un avantage pour la détection des sauts de cycle en cours de campagne de mesure.