Master de Physique 1ère année
Physique des satellites et du positionnement
M.C. Angonin, P. Delva, B. Fang et R. Geiger

TD ionosphère troposphère

1. Vitesse de phase et vitesse de groupe

Soient deux ondes électromagnétiques planes progressives et monochromatiques, de même amplitude, émises par la même source (satellite) :
$s_1(x,t) = A\ \cos(\omega_1 t - k_1 x) \qquad s_2(x,t) = A\ \cos(\omega_2 t - k_2 x)$
a- Déterminer l'expression des battements représentant le signal total émis par la source.
b- Donner la pulsation de la porteuse qui est liée à la vitesse de phase du signal. Commenter. De même, donner la vitesse de l'enveloppe des battements et vérifier qu'elle correspond à la vitesse de groupe.

2. Propagation dans un plasma

On étudie la propagation dans un plasma d'une onde plane progressive transversale suivant $\overrightarrow{u_x}$.
Le champ électrique associé s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(x,t) = E_0\ \exp i(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_y}$$

On suppose que les ions du plasma ne se déplacent pas et que l'équation du mouvement des électrons suit le modèle de Drude :

$$i\omega\ \overrightarrow{v_e} = -\frac{e}{m_e}\ \overrightarrow{E}$$

a- En déduire la loi d'Ohm entre la densité de courant et le champ électrique : $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$.
Vérifier que : $\sigma = \dfrac{N_e\ e^2}{i m_e \omega}$ où N_e est le nombre d'électrons par unité de volume.
On montre alors que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} -ik\ \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{E} = 0 \\ -ik\ \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ -ik\ \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E} = -i\omega\ \overrightarrow{B} \\ -ik\ \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma\ \overrightarrow{E} + \epsilon_0 \mu_0\ i\omega\ \overrightarrow{E} \end{cases}$$

b- Déterminer l'expression la relation de dispersion de l'onde dans le plasma.
c- k étant réel pour une onde qui se propage, en déduire que l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation limite ω_p : la pulsation de plasma, dont on donnera l'expression.
d- Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.
e- En déduire l'expression littérale et numérique, en fonction de la fréquence f, de l'indice de réfraction du milieu au premier ordre en f^2.

3. Indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère

L'indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère peut être déterminé en supposant que l'atmosphère est un mélange homogène à la température de 0°C et à la pression de 101325 Pa. Dans le tableau ci-dessous, pour les fréquences radio, les indices de réfractions sont donnés pour chaque principaux gaz de l'atmosphère ; suivent ensuite les abondances en volume de ces gaz.

Gaz	Indice	Abondance (%)
Diazote	$1,0002941$	$78,08$
Dioxygène	$1,0002664$	$20,95$
Argon	$1,000281$	$0,93$
Dioxyde de carbone	$1,000494$	$0,04$

Déterminer l'indice moyen de la composante sèche de l'atmosphère. Comparer à la valeur recommandée pour les communications radio
$n_r - 1 = 77,6 \times 10^{-8} \frac{P}{T}$
où les différentes quantités sont exprimées dans des unités S.I.

Master de Physique 1ère année
Physique des satellites et du positionnement
M.C. Angonin, P. Delva, B. Fang et R. Geiger

TD ionosphère troposphère
Correction sommaire

1. Vitesse de phase et vitesse de groupe

a- $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = A\ \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\ \cos(\omega_2 t - k_2 x)$
$s(x,t) = 2A\ \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{-\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{-k_1+k_2}{2}x\right)$
b- La porteuse est la pulsation la plus grande : $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Il s'agit de la fréquence moyenne du signal. Elle est associé à une vitesse de propagation : $v_\varphi = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}$ qui correspond bien à la vitesse de propagation moyenne du signal total.
Cette porteuse est modulée par une enveloppe à "basse" pulsation : $\frac{-\omega_1+\omega_2}{2}$. La vitesse de propagation de cette modulation est : $v_m = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$. A la limite où les deux fréquences sont proches on a : $\lim_{2\to1}\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$ ce qui est la définition de la vitesse de groupe. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de la modulation d'un signal dont la porteuse est à une grande fréquence.

2. Propagation dans un plasma

a- $\overrightarrow{j} = -N_e\ e\ \overrightarrow{v_e} = \frac{N_e\ e^2}{i\omega m_e}\overrightarrow{E}$
Donc : $\sigma = \frac{N_e\ e^2}{i m_e \omega}$ où N_e est le nombre d'électrons par unité de volume.
b- $-ik\ \overrightarrow{u_x} \wedge \left(\frac{k}{\omega}\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}\right) = \mu_0\sigma\ \overrightarrow{E} + \epsilon_0\mu_0\ i\omega\ \overrightarrow{E}$
$i\frac{k^2}{\omega}\overrightarrow{E} = \mu_0\frac{N_e\ e^2}{i\omega m_e}\overrightarrow{E} + \epsilon_0\mu_0\ i\omega\ \overrightarrow{E}$
$k^2 = -\mu_0\frac{N_e\ e^2}{m_e} + \epsilon_0\mu_0\ \omega^2$
c- L'onde se propage si : $\epsilon_0\mu_0\ \omega^2 > \mu_0\frac{N_e\ e^2}{m_e}$
$\omega^2 > \frac{N_e\ e^2}{\epsilon_0 m_e} = \omega_p^2$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e\ e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 56,4\sqrt{N_e}$ pulsation plasma (ou de Langmuir)
d- On a donc : $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$ $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\right)$

$v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$ est la vitesse de phase (qui peut être supérieure à c)

$v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$ est la vitesse de groupe ou vitesse à laquelle se propage l'information contenue dans le signal.

e- L'indice de réfraction s'écrit : $n = \dfrac{c}{v}$

On a donc : $n_\varphi = \dfrac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{2\omega^2} = 1 - \dfrac{\dfrac{N_e\, e^2}{\epsilon_0 m_e}}{2\omega^2} = 1 - 40,3\dfrac{N_e}{f^2}$

car : $\frac{1.6^2\times10^{-38}}{9.1\times10^{-31}\times8.85\times10^{-12}\times2\times4\times\pi^2} = 40.259$

De même : $n_g = \dfrac{c}{v_g} = 1 + 40,3\dfrac{N_e}{f^2}$

3. Indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère

On a pour un mélange de gaz : $n_{air\,\mathrm{sec}} = \sum n_i\ a_i$

$n_{air\,\mathrm{sec}} = 1.0002941 \times 0.7808 + 1.0002664 \times 0.2095 + 1.000281 \times 0.0093 + 1.000494 \times 0.0004 = 1.000\,288\,3$

Pour les communications radio on a

$n_r - 1 = 77.6 \times 10^{-8} \times \frac{101325}{(273.15)} = 2.878\,572\,2 \times 10^{-4}$

La différence entre les deux est de l'ordre de 10^{-6} ce qui en terme de positionnement représente 10 cm sur les 50 km de la troposphère. La différence n'est pas énorme pour des modèles aussi approximatifs.