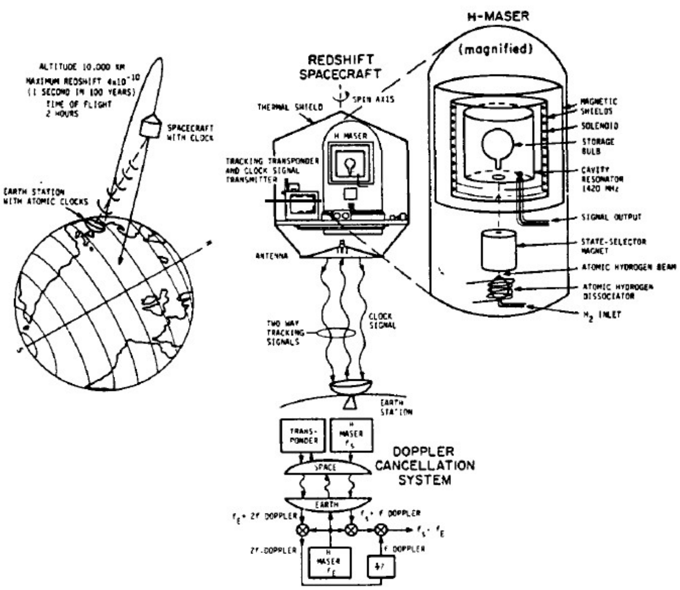
MASTER 1ère ANNEE - EXAMEN
Physique des satellites et du positionnement
Gravity Probe A

04 avril 2016 - durée de l'épreuve : trois heures

L'usage des calculatrices est autorisé. Les documents distribués en cours sont autorisés, ainsi que vos notes manuscrites. Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les même que dans le cours. Les différentes parties du problème sont indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre voulu. Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.

Le 18 juin 1976, une fusée de type Scout D a été lancée des Iles Wallops en Virginie pour atteindre une altitude de 10 000 km. Cette fusée transportait une sonde de 100 kg stabilisée en rotation comportant notamment une horloge maser à hydrogène. L'objectif de l'expérience était de mesurer directement l'effet du potentiel gravitationnel sur la fréquence de l'horloge à bord par comparaison avec une horloge maser au sol. Le temps de vol fut suffisant pour permettre à l'expérience de durer un peu moins de 2 heures. Cette expérience menée par R. F. C. Vessot et M. W. Levine fut appelée : Gravity Probe A (GP-A).



Les données numériques du problème sont :

$$\begin{aligned}
R_T &= 6378 \text{ km} \\
\Omega_T &= 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \\
Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\
c &= 299792458 \text{ m.s}^{-1} \\
\nu_H &= 1420405751,770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du maser à hydrogène)}
\end{aligned}$$

A - Maser à hydrogène

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge maser à hydrogène, la transition d'horloge s'effectue entre deux niveaux hyperfins de l'hydrogène $1^2\ S_{1/2}\ F = 1$ et $1^2\ S_{1/2}\ F = 0$. Donner les valeurs des nombres quantiques associés à ces niveaux ainsi que leur degré de dégénérescence.
2. On étudie la transition entre les 2 états des atomes $F = 1\ m_F = 0$ et $F = 0\ m_F = 0$ associés à la transition de l'horloge que l'on désigne par $|f\rangle$ et $|e\rangle$ respectivement. Cette transition est induite par un champ magnétique de direction constante et d'amplitude $B \cos \omega t$, avec B et ω constantes.

   L'hamiltonien total peut s'écrire sous la forme

   $$H_{tot} = H_0 + H(t)$$

   avec $\quad H_0|f\rangle = \hbar\omega_f|f\rangle$
   $H_0|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle$
   $H(t)|f\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|e\rangle$
   $H(t)|e\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|f\rangle$
   où ω_f, ω_e et Ω sont des constantes.

   On note l'état de l'atome au temps t par

   $$|\psi(t)\rangle = a(t)|f\rangle + b(t)|e\rangle$$

   Ecrire l'équation d'évolution de $|\psi(t)\rangle$.
3. Déterminer les équations différentielles qui gouvernent l'évolution en temps des coefficients $a(t)$ et $b(t)$. En définissant de manière appropriée des fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ telles que $|\alpha|^2 = |a|^2$ et $|\beta|^2 = |b|^2$, et en négligeant des termes oscillant rapidement, démontrer que :

   $$\dot{\alpha} = \frac{i\Omega}{2}\beta e^{i\omega_d t}$$

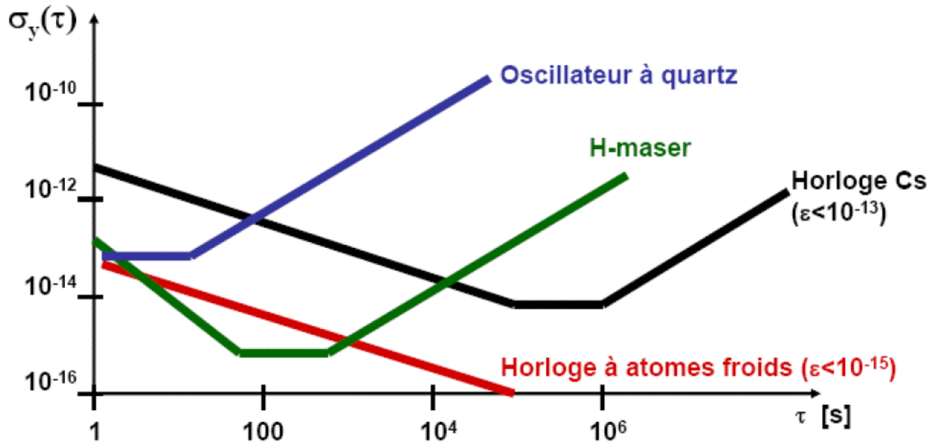
   $$\dot{\beta} = \frac{i\Omega}{2}\alpha e^{-i\omega_d t}$$

   En posant : $\omega_d = \omega - \omega_0$ et $\omega_0 = \omega_e - \omega_f$
4. Si que l'on impose la condition initiale : $a(0) = 1$ et $b(0) = 0$, la solution de l'équation précédente donne :

   $$b(t) = -i\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\frac{\Omega' t}{2}e^{-i\omega_d t/2}e^{-iw_e t}$$

   avec $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \omega_d^2}$

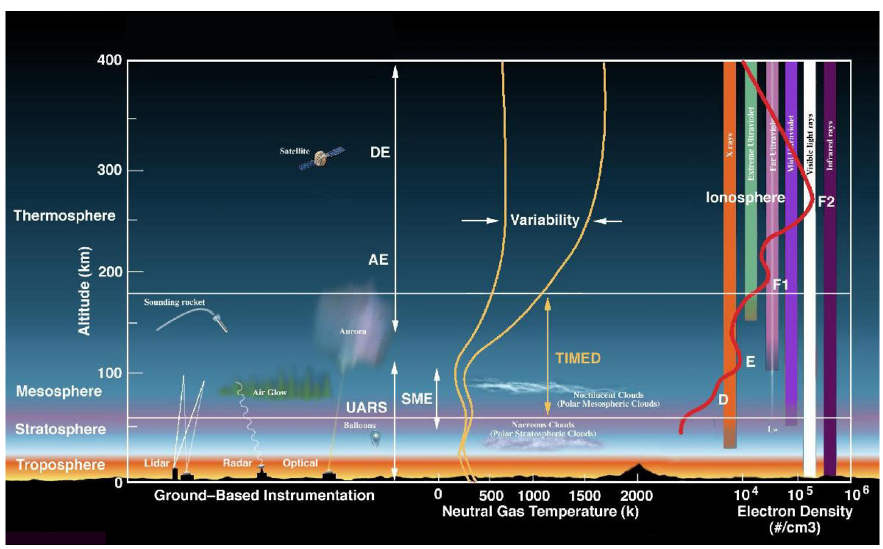
   Quelle est la probabilité de transition de l'atome vers l'état $|e\rangle$ au temps t ?
5. Qu'est-ce que la fréquence de Rabi du système ? De quel(s) paramètre(s) dépend-elle ? Quel est le phénomène associé à cette fréquence ?
6. Décrire brièvement le rôle de l'oscillateur dans le fonctionnement d'une horloge atomique.
7. Le diagramme ci-dessous donne les stabilités de différents types d'horloges. A l'époque de l'expérience, les horloges à atomes froids n'existaient pas.



Justifier le choix de l'horloge pour l'expérience.

B - Effets de l'atmosphère

La trajectoire de Gravity Probe A a culminé à 10 000 km environ. Les signaux de communication avec le sol ont donc traversés une partie de l'atmosphère terrestre. Le schéma ci-dessous donne les caractéristiques typiques de l'atmosphère terrestre. Pour les communications, l'expérience Gravity Probe A utilisait deux fréquences différentes : pour les signaux partant du sol vers la sonde la fréquence était $f_1 = 2117,69$ MHz et pour les signaux allant de la sonde vers le sol, la fréquence valait $f_2 = 2299,75$ Mhz.



1. Quels sont les effets de l'atmosphère terrestre sur les signeux de communication ? Quels sont les paramètres physiques nécessaires pour évaluer ces effets ? On demande une réponse qualitative.
2. On s'intéresse à présent aux effets de la partie ionosphérique sur les signaux de communication. Rappeler les conditions pour qu'un signal électromagnétique puisse traverser un plasma. La démonstration détaillée n'est pas demandée, mais une justification rapide pourra être donnée.
3. Exprimer le retard Δt induit sur un signal de fréquence f par l'ionosphère lorsqu'elle a une densité électronique n_0. On appelle L la distance géométrique parcourrue par le signal. Si la formule comporte un nombre, préciser les unités de cette valeur.
4. Si l'on ne prend en compte que les effets de l'ionosphère, déterminer la différence de temps de parcours pour des signaux simultanés allant du sol vers la sonde et réciproquement. Quel intérêt y a-t-il à envoyer des signaux de fréquences différentes entre pour la communication sol-sonde et sonde-sol ?
5. Les expérimentateurs ont affirmé que, lorsque la sonde culmine à 10 000 km, les erreurs de mesure en temps issues des fluctuations ionosphériques étaient de l'ordre de $5 \cdot 10^{-15}$ en relatif. En supposant que les

fréquences des signaux sont connues à une précision relative bien meilleure, estimer l'incertitude relative sur les fluctuations de densité électronique de l'ionosphère associée à cette estimation.

C - Orbite de GP-A

On suppose que l'orbite de GP-A est une orbite keplerienne. Vu les masses respectives de la Terre et de la fusée Scout, on suppose que le barycentre des masses des deux objets est confondu avec le centre de masse de la Terre. Dans le plan orbitale de GP-A, on introduit les coordonnées polaires usuelles (r, ϕ), avec leurs vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$, où r est la distance du centre de masse de la fusée Scout au centre de masse de la Terre, et ϕ l'angle entre le vecteur position initial de la fusée (au temps $t = 0$, correspondant au moment son lancement) et sa position au temps t.

1. Quelle sont les deux quantités conservées du problème de Kepler ? Exprimer la norme du moment cinétique par unité de masse réduite, h, en fonction de r et de v_ϕ, où $v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{u}_\phi$ et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la fusée Scout.
2. La fusée est lancée de façon verticale, donc la composante v_ϕ au moment du lancement est uniquement due à la vitesse de rotation de la Terre. Calculer h, sachant que la position initiale de la fusée est en $r = R_T$ à une latitude de $\lambda = 29°44'$.
3. Soit $r = R_a$ la distance de la fusée Scout au centre de la Terre lorsqu'elle est à son apogée, à 10000 km d'altitude. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à l'apogée de la fusée, en fonction de h, R_a et Gm. Calculer la valeur de $\tilde{E}$. D'après cette valeur, quelle est le type d'orbite de la fusée ?
4. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à la position initiale de la fusée, en fonction de h, R_T, Gm et v_{r0}, la composante suivant $\vec{u}_r$ de la vitesse à sa position initiale. Avec la question précédente, en déduire l'expression de la vitesse v_{r0} en fonction de R_a, R_T, h et Gm. Calculer sa valeur.
5. Exprimer l'eccentricité de l'orbite e en fonction de h, R_a et Gm. La calculer. D'après sa valeur, de quelle figure géométrique est proche la forme de l'orbite ? À quelle distance du centre de masse de la Terre devrait se trouver le périgée de l'orbite ? Est-ce possible ? Faire un dessin qualitatif de la forme de l'orbite et de la Terre, en indiquant le vecteur vitesse de la fusée et la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ à l'endroit du lancement.

D - Comparaison d'horloges

On se place dans un référentiel GCRS dans lequel :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{1}$$

où on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés, et $i, j = \{1, 2, 3\}$.

1. Quelles sont les caractéristiques du système GCRS ?
2. En partant de la métrique (**??**), calculez $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ en faisant un développement limité à l'ordre $1/c^2$. On introduira la norme de la vitesse $v = \left(\delta_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}$.
3. Sachant que $a = 8.193 \times 10^3$ km et $e = 0.9990$, calculer la valeur de l'anomalie eccentrique E au moment du lancement de la fusée. En utilisant l'équation de Kepler, en déduire le temps t_a à l'apogée (sachant que $t = 0$ au moment du lancement).
4. En utilisant les relations sur l'orbite de Kepler données en annexe, montrer en intégrant la relation de la question précédente que :

$$\tau_f(t) = \left(1 - \frac{3Gm}{2ac^2}\right) t - \frac{2\sqrt{Gma}}{c^2} e \sin E(t) + C_f \ , \tag{3}$$

où τ_f est le temps propre de l'horloge dans la fusée, a est le demi grand axe de l'orbite de la fusée, e l'excentricité, E l'anomalie excentrique et C_f est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_f(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante C_f ?

5. En intégrant la relation de la question 2 pour une horloge qui reste fixée à l'endroit du lancement, montrer que :
$$\tau_s(t) = \left(1 - \frac{Gm}{R_T c^2} - \frac{(R_T \Omega_T \cos\lambda)^2}{2c^2}\right) t + C_s \ , \tag{4}$$
où τ_s est le temps propre de l'horloge restée au sol, λ est la latitude du lieu du lancement et C_s est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_s(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante C_s ?
6. Déduire des questions précédentes l'expression formelle de la différence entre les temps propres de l'horloge dans la fusée et le temps propre de l'horloge au sol au moment de l'apogée de la fusée, et la calculer.
7. Expliquer la différence entre erreur aléatoire et erreur systématique. Dans le tableau 1 est donné un bilan d'erreur. Quelle est l'erreur totale sur la mesure (en fréquence relative) ? En déduire l'erreur en temps au moment de l'apogée, et la précision relative avec laquelle le décalage relativiste a été mesuré.

Erreur aléatoire	
bruit combiné des maser et du lien micro-onde	13.0×10^{-15}
Erreur atmosphérique résiduelle	2.5×10^{-15}
Erreur ionosphérique résiduelle	5.0×10^{-15}
Erreur systématique	
Horloges sol	3.0×10^{-15}
Horloge embarquée	4.5×10^{-15}
Erreurs en position et vitesse	3.3×10^{-15}

TABLE 1 – Bilan d'erreur de l'expérience GP-A (en fréquence relative)

Annexes

Relations pour une orbite de Kepler :

$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$v^2 = Gm\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$
$$(1 - e\cos E)\mathrm{d}E = n\mathrm{d}t$$