TD3 - Métrique et projection

A - Projection sphérique

Dans cet exercice, on se propose d'étudier les changements de coordonnées et les projections pour une métrique sphérique.

1. Considérons un point de coordonnées $x^i = (x, y, z)$. Exprimer ces coordonnées en fonction des coordonnées sphériques $x^{i'} = (\rho, \theta, \varphi)$.
2. Pour un espace euclidien, l'intervalle s'écrit
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$
D'un autre coté, le changement de coordonnées s'écrit (en utilisant la notation d'Einstein)
$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl} \\ &= x^k_{i'} x^l_{j'} g_{kl} \end{aligned} \tag{2}$$
Écrire le tenseur métrique $g'_{i'j'}$ représentant les coordonnées sphériques. En déduire l'expression de l'intervalle.
3. La métrique de la surface définie par $\rho = 1$ s'écrit
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Sigma^2 &= \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \\ &= g^{(\Sigma)}_{ab} \mathrm{d}x^{a'} \mathrm{d}x^{b'} \end{aligned} \tag{3}$$
La métrique du plan quant à elle s'écrit
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ &= g^{(\sigma)}_{cd} \mathrm{d}x^c \mathrm{d}x^d \\ &= \delta_{cd} \mathrm{d}x^c \mathrm{d}x^d \end{aligned} \tag{4}$$
On appelle projection l'application $\mathcal{P}$ telle que
$$\begin{cases} \mathcal{P}: & (\theta, \varphi) \to (x, y) \\ x = & f(\theta, \varphi) \\ y = & g(\theta, \varphi) \end{cases} \tag{5}$$
En déduire la métrique $\mathcal{G}^{(\sigma)}$ paramétrée en (θ, φ).
4. Montrer que
$$\mathrm{d}\sigma^2 = (\mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\varphi) J^T J \begin{pmatrix} \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} \tag{6}$$
où J est la matrice jacobienne de la transformation.
5. Soit la projection dite "équivalente" :
$$\begin{cases} x & = \varphi \\ y & = \cos\theta \end{cases} \tag{7}$$
On définit le rapport α entre la surface telle que projetée sur la carte plane et la surface initiale sur la sphère
$$\alpha = \left| \frac{\det J}{\sin\theta} \right| \tag{8}$$
Si les deux surfaces sont égales, alors $\alpha = 1$. Montrer que c'est le cas pour une surface projetée à l'aide de la projection équivalente (7).

6. Considérons maintenant la projection dite "conforme"

$$\begin{cases} x & = \ln \left[\frac{1}{\tan(\theta/2)} \right] \\ y & = \varphi \end{cases} \tag{9}$$

En considérant l'expression du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= g_{ab} u^a v^b \\ &= ||u||.||v|| \cos(\widehat{u, v}), \end{aligned} \tag{10}$$

montrer que la projection conforme (9) conserve les angles.