

**Examen - Physique des satellites et du positionnement**  
 Géodésie chronométrique  
 Lundi 26 mars 2018

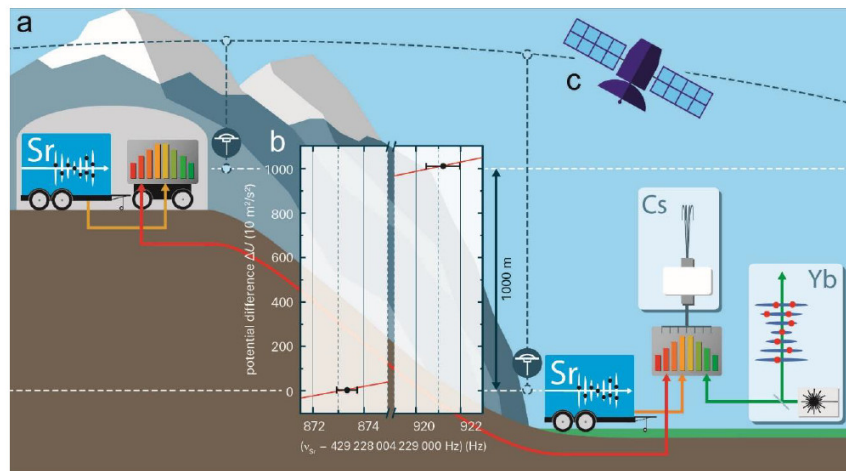
Les documents distribués en cours sont autorisés, ainsi que vos notes à l'exclusion de tout autre document. Les notations utilisées dans ce problème sont les mêmes que dans le cours. L'usage des calculatrices est autorisé. Les différentes parties du problème sont indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre voulu. Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées. **Dans la mesure où les documents sont autorisés, tout plagiat du contenu des documents sans apport personnel sera considéré comme une réponse nulle.**

## Mesures géodésiques par comparaison d'horloges

Les données du problème sont le rayon de la Terre  $R_T$ , la vitesse de rotation de la Terre  $\Omega_T$ , le produit  $Gm$  de la constante gravitationnelle avec la masse de la Terre, et son aplatissement  $J_2$ . Leur valeur numérique est :

$$\begin{aligned}
 R_T &= 6378 \text{ km} \\
 \Omega_T &= 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \\
 Gm &= 3.985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\
 c &= 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\
 J_2 &= 1.083 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

En 2017, Jacopo Grotti et ses collaborateurs ont effectué une expérience dans les Alpes pour déterminer le potentiel gravitationnel terrestre à partir de mesures de fréquence d'horloges atomiques optiques. Dans ce but, ils ont placé une horloge au sommet d'une montagne et une autre identique, au niveau de la mer (voir figure ci-dessous).



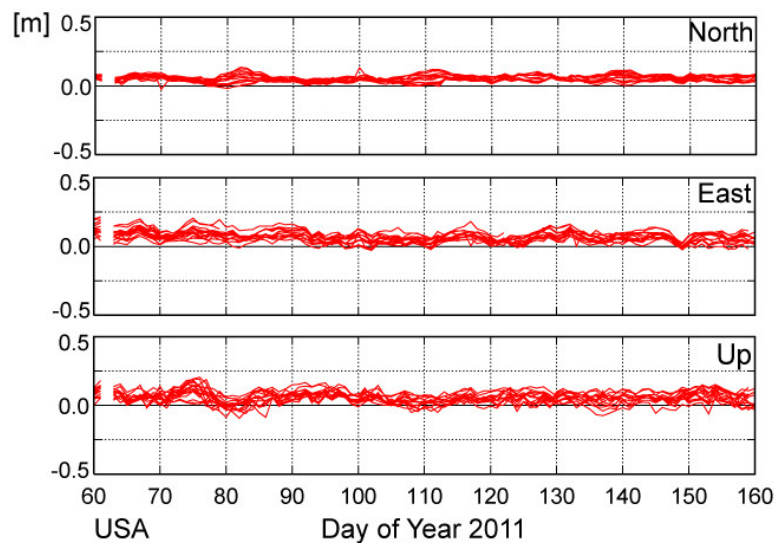
Pour parvenir à cette mesure, la détermination des positions des deux horloges doit être effectuée à la plus grande précision accessible à l'aide des satellites de positionnement, par exemple en utilisant le mode "Precise Point Positioning" ou PPP.

## A - Principe du PPP

PPP est un algorithme de positionnement pour un récepteur unique et isolé ne permettant pas le recours à des mesures différentielles. Il se fonde sur des mesures utilisant le code et la phase des signaux de deux fréquences différentes que l'on combine avec des informations précises sur l'orbite des satellites et les corrections des horloges.

Les observations issues de tous les satellites accessibles sont collectées et combinées de manière à obtenir les valeurs des différentes inconnues : les coordonnées du récepteur, les caractéristiques de l'horloge du récepteur, le délai troposphérique et les ambiguïtés de phase. Cependant, les résultats ne peuvent pas être obtenus en temps réel : des calculs de plusieurs minutes, voire plusieurs dizaines de minutes sont nécessaires pour converger.

Lors d'une campagne de tests en 2011, la position d'une station de référence (dont la position est connue par d'autres méthodes de positionnement) a été déterminée en mode PPP. Les résultats obtenus sont présentés dans les trois directions (Nord, Est et altitude) sous la forme de la différence en mètre entre la position "PPP" et la position de référence dans la figure ci-dessous.



1. Estimer la précision de la mesure PPP ainsi obtenue. Donner sa valeur en terme de délai temporel sur le signal de positionnement.

**Solution:** La précision en mètre est de l'ordre de 10 cm (un peu moins pour le positionnement vers le Nord), ce qui correspond à une erreur sur le délai de 0,3 ns.

2. Justifier la nécessité de lever les ambiguïtés de phase pour une mesure PPP.

**Solution:** Les ambiguïtés de phase portent sur un nombre entier de périodes de la porteuse du signal. Pour les deux fréquences du GPS, une période (ambiguïté minimale) correspond à une erreur de positionnement de 19 cm ou de 24,4 cm. Ces deux valeurs sont plus grandes que la précision obtenue en mode PPP. Il est donc nécessaire de lever les ambiguïtés de phase en mode PPP.

3. Déterminer les parties de l'atmosphère qui interagissent les signaux des GNSS en décrivant les types de perturbations induites ?

**Solution:** Les signaux GNSS traversent l'ionosphère et la troposphère. L'ionosphère est constituée d'un plasma, ce qui est un milieu dispersif qui ne laisse passer que les fréquences au-dessus de la fréquence plasma locale. Cette fréquence plasma ( $f_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ ) dépend du contenu en électrons sur la ligne de visée qui est très variable spatialement et temporellement.

La troposphère est un milieu diélectrique qui est constitué d'une composante sèche et d'une composante humide ayant chacune un comportement différent sur l'onde. Ce milieu est non dispersif, mais induit un délai dans le signal du fait de son indice de réfraction qui va donc dépendre de l'état météorologique de la troposphère sur la ligne de visée.

4. Dans le cadre le plus général du positionnement par satellites, quelle(s) technique(s) peu(ven)t être utilisée(s) pour compenser l'effet de l'ionosphère sur le signal? Justifier l'utilisation de deux fréquences différentes pour le mode PPP.

**Solution:** Pour des mesures de faibles précisions, un modèle, tel que le modèle de Klobuchar, dont les paramètres sont mis à jour à intervalles réguliers, permet d'estimer la contribution de l'ionosphère. Le caractère dispersif de l'effet de l'ionosphère permet de le déterminer avec précision si des mesures sont effectuées simultanément dans deux fréquences distinctes. Ainsi, si deux pseudo-distances  $L_1$  et  $L_2$  sont mesurées à deux fréquences distinctes  $f_1$  et  $f_2$ , le délai ionosphérique va dépendre de la fréquence au carré. La combinaison suivante est ne dépend donc pas des effets de l'ionosphère et est appelée "ionofree" :

$$L_3 = \frac{1}{(f_1)^2 - (f_2)^2} ((f_1)^2 L_1 - (f_2)^2 L_2)$$

Cette technique est la plus fiable et précise pour le mode PPP qui n'utilise pas les mesures différentielles.

Enfin, lorsque l'on effectue une mesure différentielle avec un GNSS, on peut supposer qu'en première approximation l'atmosphère traversée est la même pour le signal qui arrive d'un satellite simultanément à la station de référence et au détecteur. Les effets ionosphériques s'éliminent donc directement en effectuant la mesure différentielle.

5. Le délai ionosphérique (homogène à un temps) dépend du contenu en électrons de l'atmosphère le long de la ligne de visée, appelé  $S$  et exprimé en nombre d'électrons/m<sup>2</sup>, ainsi que de la fréquence du signal. On suppose qu'il s'exprime par la loi :

$$\delta_{\text{iono}} = \frac{40.308}{cf^2} S \quad (1)$$

- (a) Calculer le délai sur les deux fréquences du GPS  $f_1 \simeq 1575,42$  MHz et  $f_2 = 1227,60$  MHz, en supposant que  $S = 300 \times 10^{16}$  électrons.m<sup>-2</sup>.

**Solution:**

$$\delta_{\text{iono } 1} = \frac{40.308}{3 \times 10^8 \times (1575,42 \times 10^6)^2} 300 \times 10^{16} = 162 \text{ ns}$$

$$\delta_{\text{iono } 2} = \frac{40.308}{3 \times 10^8 \times (1227,60 \times 10^6)^2} 300 \times 10^{16} = 267 \text{ ns}$$

- (b) Si la différence des délais entre les deux fréquences est connue avec l'erreur sur le délai déterminée en première question. Quelle est l'erreur sur la valeur de  $S$  ainsi déterminée?

**Solution:**

$$\sigma_S = \frac{c(f_1 f_2)^2}{(f_1^2 - f_2^2)} \frac{\sigma_\delta}{40,308}$$

L'erreur sur  $S$  est de  $85 \times 10^{14}$  électrons par mètre carré.

## B - Principe d'une horloge optique

On considère, pour cet exercice, une horloge utilisant une transition optique de l'atome de mercure. La figure ci-dessous donne les énergies et les durées de vie de quelques niveaux excités du mercure :

$6^1P_1$  — 1621 THz  $\tau = 1,4$  ns

$6^3P_2$  — 1320 THz

$6^3P_1$  — 1182 THz  $\tau = 125$  ns

$6^3P_0$  — 1129 THz  $\tau \sim 1$  s

$6^1S_0$  — fondamental

### Transitions d'horloge et de refroidissement

1. Donner les nombres quantiques  $s$ ,  $\ell$  et  $j$  pour les niveaux  $6^1S_0$  et  $6^3P_0$ . Si le spin nucléaire est  $i = 1/2$ , donner le degré de dégénérescence de chaque niveau. (Noter que dans ce qui suit, la dégénérescence ne jouera pas de rôle.)

**Solution:**

Etat  $6^3P_0$  :

$n = 6$  (états internes) ;  $s = 1$  ;  $\ell = 1$  (moment cinétique orbital) ;  $j = 0$  (moment cinétique électronique total) ;  $i = 1/2$  (moment cinétique nucléaire)

La dégénérescence est de 2.

Etat  $6^1S_0$  :

$n = 6$  (états internes) ;  $s = 0$  ;  $\ell = 0$  (moment cinétique orbital) ;  $j = 0$  (moment cinétique électronique total) ;  $i = 1/2$  (moment cinétique nucléaire)

La dégénérescence est de 2.

### Interaction dipolaire électrique

Dans la suite on étudie la transition entre les états  $6^1S_0$  et  $6^3P_0$ . On note ces états par  $|s\rangle$  et  $|p\rangle$  respectivement. Cette transition est induite par un faisceau laser dont le champ électrique

$\vec{E}$  a une direction constante et une amplitude  $E \cos \omega t$  avec  $E$  et  $\omega$  constantes. L'hamiltonien total de l'atome peut s'écrire

$$H(t) = H_0 - (E \cos \omega t)D$$

avec

$$\begin{aligned} H_0|s\rangle &= \hbar\omega_s|s\rangle \\ H_0|p\rangle &= \hbar\omega_p|p\rangle \\ \langle p|D|s\rangle &= \langle s|D|p\rangle = K \\ \langle p|D|p\rangle &= \langle s|D|s\rangle = 0 \end{aligned}$$

avec  $\omega_s, \omega_p, K$  constantes. On note la fonction d'onde atomique au temps  $t$  par :

$$\phi(t) = a(t)|s\rangle + b(t)|p\rangle.$$

2. Ecrire l'équation d'évolution du système.

**Solution:**  $i \hbar \frac{d\phi}{dt} = H(t) \phi$

3. Obtenir les équations différentielles qui gouvernent l'évolution en temps des coefficients  $a(t)$  et  $b(t)$ . En définissant de manière appropriée des fonctions  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  telles que  $|\alpha|^2 = |a|^2$  et  $|\beta|^2 = |b|^2$ , et en négligeant des termes oscillant rapidement, démontrer

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i\Omega_0}{2} \beta e^{i\omega_d t} \\ \dot{\beta} &= \frac{i\Omega_0}{2} \alpha e^{-i\omega_d t} \end{aligned}$$

où  $\Omega_0 = KE/\hbar$ ,  $\omega_d = \omega - \omega_0$ ,  $\omega_0 = \omega_p - \omega_s$ .

**Solution:**  $i \hbar \frac{d(a(t)|s\rangle + b(t)|p\rangle)}{dt} = (H_0 - (E \cos \omega t)D) (a(t)|s\rangle + b(t)|p\rangle)$

On obtient ainsi :

$$i \hbar \frac{d(a(t))}{dt} = \hbar\omega_s a(t) - \hbar\Omega_0 b(t) \cos \omega t$$

$$i \hbar \frac{d(b(t))}{dt} = \hbar\omega_p b(t) - \hbar\Omega_0 a(t) \cos \omega t$$

Si on pose :

$$a(t) = e^{-i\omega_s t} \alpha(t)$$

$$b(t) = e^{-i\omega_p t} \beta(t)$$

En effectuant le changement de variables et en négligeant les termes oscillant rapidement, on trouve les équations proposées :

$$i(-i\omega_s e^{-i\omega_s t} \alpha + e^{-i\omega_s t} \dot{\alpha}) = \omega_s e^{-i\omega_s t} \alpha - \Omega_0 \cos \omega t e^{-i\omega_p t} \beta$$

$$\dot{\alpha} = i\Omega_0 \cos \omega t e^{-i(\omega_p - \omega_s)t} \beta$$

$$\dot{\alpha} \simeq \frac{i\Omega_0}{2} \beta e^{i\omega_d t}$$

Et même calcul pour  $\beta$ .

4. Pour les conditions initiales  $\alpha(0) = 1$  et  $\beta(0) = 0$ , vérifier que les solutions sont

$$\alpha(t) = \left[ -\frac{i\omega_d}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} + \cos \frac{\Omega t}{2} \right] e^{i\omega_d t/2}$$

$$\beta(t) = \frac{i\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{-i\omega_d t/2}$$

où  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_d^2}$ .

**Solution:**  $\alpha(t) = \left[ -\frac{i\omega_d}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} + \cos \frac{\Omega t}{2} \right] e^{i\omega_d t/2}$   
 $\dot{\alpha}(t) = \left[ -\frac{i\omega_d}{\Omega} \frac{\Omega t}{2} \cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{\Omega t}{2} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] e^{i\omega_d t/2} + \left[ -\frac{i\omega_d}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} + \cos \frac{\Omega t}{2} \right] \frac{\Omega_d t}{2} e^{i\omega_d t/2}$   
 $\dot{\alpha}(t) = -\frac{1}{2} \frac{(\Omega_0)^2}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\omega_d t/2}$   
 $\alpha(t) = \frac{i\Omega_0}{2} \beta e^{i\omega_d t}$

Calcul analogue pour  $\beta$ .

D'autre part, on vérifie bien que les solutions proposées correspondent bien aux conditions aux limites énoncées (calcul évident à faire explicitement dans la copie).

5. Donner l'expression de la probabilité que l'atome effectue la transition de l'état  $|s\rangle$  vers l'état  $|p\rangle$ . Tracer son évolution dans le temps dans le cas où le laser est en résonance avec la transition. Quelle condition sur le champ et la durée d'interaction permet de maximiser la probabilité de transition ?

**Solution:**  $P = |\beta|^2 = \frac{(\Omega_0)^2}{2\Omega} (1 - \cos \Omega t)$

A la résonance :  $\Omega = \Omega_0$

$P = |\beta|^2 = (1 - \cos \Omega_0 t)$

Cette probabilité oscille entre 0 et 1 sinusoidalement.

La probabilité de transition est maximale si :

$\Omega_0 t = KE/\hbar t = (2n + 1)\pi$  avec  $n$  entier.

## Exactitude de l'horloge

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des effets systématiques dans une horloge à atomes de mercure :

Effet	Correction (Hz)	Incertitude (Hz)	Incertitude relative ( $10^{-16}$ )
Zeeman 1er ordre	0	1.6	14
Light shift réseau (400 Er)	4.5	0.9	8
Effet 2ème ordre réseau (400 Er)	0.6	0.6	5
Pulling par sidebands transverses	0	1	9
Collisions froids	1	1	9
Rayonnement du corps noir	2.4	1	9

6. De combien faut-il corriger la valeur de fréquence de l'horloge? Quelle est l'exactitude de l'horloge, absolue (en Hz) et relative ?

**Solution:** Pour donner la correction totale à appliquer sur la mesure de l'horloge, il faut additionner toutes les corrections données dans le tableau :

$C = 4.5 + 0.6 + 1 + 2.4 = 8.5$  Hz

Les incertitudes données dans le tableau sont indépendantes, l'incertitude totale vaut donc :

$I = \sqrt{1.6^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2.6$  Hz

Et l'incertitude relative vaut, de même :

$R = \sqrt{14^2 + 8^2 + 5^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2} = 23 \times 10^{-16}$

## C - Mesures géodésiques

### Mesure chronométrique de l'altitude

On se place dans le référentiel GCRS, avec les coordonnées  $(cT, \mathbf{X})$ , dans lequel :

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2U(T, \mathbf{X})}{c^2} \right) c^2 dT^2 + \left( 1 + \frac{2U(T, \mathbf{X})}{c^2} \right) \delta_{ij} dX^i dX^j \quad (2)$$

où on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés, et  $i, j = \{1, 2, 3\}$ .

1. Quelles sont les caractéristiques du système GCRS ?

**Solution:** Ce système de référence est centré sur le centre de masse de la Terre. Il est fixe/non-tournant par rapport aux objets distants extra-galactiques. Le temps coordonné est le TCG (Temps Coordonnée Géocentrique).

2. Calculer la relation entre temps propre et temps coordonné,  $(d\tau/dT)$ , développée à l'ordre  $1/c^2$ , en fonction de  $U(T, \mathbf{X})$  et de la norme de la vitesse coordonnée  $V = \left( \delta_{ij} \frac{dX^i}{dT} \frac{dX^j}{dT} \right)^{1/2}$ . On rappelle que  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  pour  $x \ll 1$ .

**Solution:**

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = - \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) c^2 dT^2 + \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j \\ \Rightarrow \left( \frac{d\tau}{dT} \right)^2 &= 1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{d\tau}{dT} &= 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + O(c^{-4}) \end{aligned} \quad (3)$$

3. On suppose que la Terre est aplatie en posant :

$$U(T, \mathbf{X}) = \frac{Gm}{R} + \frac{GmR_T^2 J_2}{2R^3} (1 - 3 \sin^2 \lambda) \quad (4)$$

où  $R = (\delta_{ij} X^i X^j)^{1/2}$  est la distance entre le centre de masse de la Terre et le point de coordonnées  $(cT, \mathbf{X})$ , et  $\lambda$  est la latitude du point. On suppose que l'horloge 1, au niveau de la mer, est à la latitude  $\lambda_1 = 40.00^\circ$  et à  $R_1 = R_T$ . Montrer que la relation formelle  $(d\tau/dT) - 1$  pour cette horloge se décompose en trois contributions, et calculer la valeur de chacune de ces contributions.

**Solution:**

$$\left( \frac{d\tau}{dT} \right)_1 - 1 = - \underbrace{\frac{Gm}{R_T c^2}}_{y_{Gm}} - \underbrace{\frac{Gm J_2}{2R_T c^2} (1 - 3 \sin^2 \lambda_1)}_{y_{J_2}} - \underbrace{\frac{(\Omega R_T \cos \lambda_1)^2}{2c^2}}_{y_v} + O(c^{-4}) \quad (5)$$

$$y_{Gm} = +6.952 \times 10^{-10}$$

$$y_{J_2} = -9.016 \times 10^{-14}$$

$$y_v = +7.061 \times 10^{-13}$$

4. On suppose que l'horloge 2, qui est en altitude, est à la même latitude que l'horloge 1,  $\lambda_2 = \lambda_1$ , et que  $R_2 = R_1 + \delta R$ , où  $\delta R/R \ll 1$ . On prendra  $\delta R = 1 \text{ km}$ . Calculer l'écart de fréquence relatif entre les deux horloges, c'est-à-dire  $(d\tau/dT)_1 - (d\tau/dT)_2$ , au premier ordre en  $\delta R/R$ . Montrer que celui-ci se décompose en trois contributions, et calculer la valeur de chacune de ces contributions.

**Solution:**

$$\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_2 - 1 = -\frac{Gm}{R_T c^2} \left(1 - \frac{\delta R}{R_T}\right) - \frac{GmJ_2}{2R_T c^2} (1 - 3 \sin^2 \lambda_1) \left(1 - 3 \frac{\delta R}{R_T}\right) \quad (6)$$

$$- \frac{(\Omega R_T \cos \lambda_1)^2}{2c^2} \left(1 + 2 \frac{\delta R}{R_T}\right) + O(c^{-4}) \quad (7)$$

D'où :

$$\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_1 - \left(\frac{d\tau}{dT}\right)_2 = \underbrace{-\frac{Gm}{R_T c^2} \frac{\delta R}{R_T}}_{\delta y_{Gm}} - \underbrace{\frac{3GmJ_2}{2R_T c^2} (1 - 3 \sin^2 \lambda_1) \frac{\delta R}{R_T}}_{\delta y_{J_2}} + \underbrace{\frac{(\Omega R_T \cos \lambda_1)^2}{c^2} \frac{\delta R}{R_T}}_{\delta y_v} + O(c^{-4})$$

$$\delta y_{Gm} = y_{Gm} \frac{\delta R}{R_T} = +1.090 \times 10^{-13}$$

$$\delta y_{J_2} = 3y_{J_2} \frac{\delta R}{R_T} = -4.241 \times 10^{-17}$$

$$\delta y_v = -2y_v \frac{\delta R}{R_T} = -2.214 \times 10^{-16}$$

5. Quels sont les contributions significatives si on compare deux fontaines atomiques d'exactitude  $10^{-16}$  ? Et si on compare deux horloges optiques d'exactitude  $10^{-17}$  ?

**Solution:**

- Fontaines :  $\delta y_{Gm}$  et  $\delta y_v$
- Horloges optiques : toutes les contributions

6. On suppose que la différence d'altitude entre les deux horloges n'est pas connue *a priori*. Jacopo Grotti et ses collaborateurs ont mesuré un écart de fréquence relatif  $\Delta\nu/\nu$  entre les deux horloges, avec  $\Delta\nu = (47.92 \pm 0.83) \text{ Hz}$ , et  $\nu = 429228004229000 \text{ Hz}$ . L'erreur obtenue sur la mesure n'est pas aussi bon que l'on pouvait espérer à cause de problèmes techniques. Quels sont les contributions significatives du modèle par rapport à l'exactitude de la mesure ? En ne prenant en compte que les contributions significatives du modèle, calculer la différence d'altitude entre les deux horloges, et l'erreur faite sur cette différence d'altitude.

**Solution:** L'erreur sur l'écart de fréquence relatif est  $1.934 \times 10^{-15}$ . La seule contribution significative du modèle est donc le terme  $y_{Gm}$ . On obtient alors :

$$\delta R = \frac{\Delta\nu}{\nu} \left(\frac{Gm}{R_T c^2}\right)^{-1} R_T = (1024 \pm 18) \text{ m} \quad (8)$$



## Mesure chronométrique de l'aplatissement de la Terre

7. On suppose maintenant que les deux horloges que l'on compare sont à  $R_1 = R_2 = R_T$ , mais à des latitudes différentes  $\lambda_1 = 45.20^\circ$ , correspondant à la ville de Modane, et  $\lambda_2 = 44.84^\circ$ , correspondant à la ville de Turin. Calculer l'écart de fréquence relatif prédit par le modèle pour le terme en  $J_2$  uniquement (formule analytique et application numérique). La comparaison faite par Jacopo Grotti et ses collaborateurs est-elle suffisamment exacte pour pouvoir calculer le  $J_2$  avec une erreur raisonnable ? Que faudrait-il faire pour réduire cette erreur ?

**Solution:**

$$\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_1 - \left(\frac{d\tau}{dT}\right)_2 = \frac{3GmJ_2}{2R_Tc^2}(\sin^2 \lambda_1 - \sin^2 \lambda_2) = 7.095 \times 10^{-15} \quad (9)$$

L'erreur sur la mesure représente environ 30% de l'effet total du  $J_2$ . Ce qui n'est pas très satisfaisant. Pour réduire cette erreur, on peut comparer des horloges à des latitudes très différentes (en valeur absolue).

8. On déplace l'horloge 1 de Modane à Paris, et donc on a maintenant  $\lambda_1 = 48.65^\circ$ . En supposant toujours que  $R_1 = R_2 = R_T$  et  $\lambda_2 = 44.84^\circ$ , quelle est l'écart de fréquence relatif entre les deux horloges prédit par le modèle complet (juste la formule analytique) ? Sachant que l'écart relatif de fréquence mesuré est de  $(-18.99 \pm 2.00) \times 10^{-15}$ , déduire la valeur de  $J_2$  et son erreur. Comparer cette erreur par rapport à la valeur vraie du  $J_2$ , donnée dans l'introduction du problème. Quel est le problème et d'où vient-il ?

**Solution:**

$$\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_1 - \left(\frac{d\tau}{dT}\right)_2 = \underbrace{\frac{3Gm}{2R_Tc^2}(\sin^2 \lambda_1 - \sin^2 \lambda_2)}_{\Delta y_{J_2}} J_2 - \underbrace{\frac{(\Omega R_T)^2}{2c^2}(\cos^2 \lambda_1 - \cos^2 \lambda_2)}_{\Delta y_v} \quad (10)$$

On a alors :

$$J_2 = (\Delta y + \Delta y_v)\Delta y_{J_2}^{-1} \quad (11)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta y &= -(18.99 \pm 2.00) \times 10^{-15} \\ \Delta y_{J_2} &= 6.552 \times 10^{-12} \\ \Delta y_v &= -7.560 \times 10^{-15} \\ J_2 &= (1.745 \pm 0.305) \times 10^{-3} \\ J_2 &= (-4.053 \pm 0.305) \times 10^{-3} \end{aligned}$$

On voit que la bonne valeur du  $J_2$  n'est pas contenue dans les barres d'erreur de notre résultat. C'est donc que l'on a sous-estimées ces barres d'erreurs. En effet, on a considéré que les 2 horloges sont à la même distance du centre de masse de la Terre, ce qui est incorrect car la Terre n'est pas sphérique.

9. Sachant qu'en fait  $R_1 = 6366.17$  km et  $R_2 = 6367.77$  km, calculer la valeur du  $J_2$  en prenant en compte le modèle complet. Que peut-on en déduire quand à l'erreur faite sur la détermination du  $J_2$  ?

**Solution:**

$$\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_1 - \left(\frac{d\tau}{dT}\right)_2 = -\Delta y_{Gm} + J_2 \Delta y_{J_2} - \Delta y_v \quad (12)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta y_{Gm} &= \frac{Gm}{c^2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \Delta y_{J_2} &= \frac{Gm R_T^2}{2c^2} \left( \frac{3 \sin^2 \lambda_1 - 1}{R_1^3} - \frac{3 \sin^2 \lambda_2 - 1}{R_2^3} \right) \\ \Delta y_v &= \frac{\Omega^2}{2c^2} \left( (R_1 \cos \lambda_1)^2 - (R_2 \cos \lambda_2)^2 \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$J_2 = (\Delta y + \Delta y_{Gm} + \Delta y_v) \Delta y_{J_2}^{-1} \quad (13)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta y &= -(18.99 \pm 2.00) \times 10^{-15} \\ \Delta y_{Gm} &= 1.750 \times 10^{-13} \\ \Delta y_{J_2} &= 6.976 \times 10^{-11} \\ \Delta y_v &= -7.982 \times 10^{-14} \\ J_2 &= (1.639 \pm 0.029) \times 10^{-3} \\ J_2 &= (1.093 \pm 0.029) \times 10^{-3} \end{aligned}$$