

MASTER 1ère ANNEE
Physique des satellites et du positionnement
Le système Galileo

Contrôle continu à rendre pour le lundi 05 mars 2018

Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les mêmes que dans le cours. Les différentes parties du problème sont indépendantes. Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.

Galileo est un projet européen de système de positionnement par satellites (radionavigation), destiné à supprimer la dépendance de l'Europe en matière spatiale, et notamment vis-à-vis du système américain, le GPS (Global Positioning System).

En test depuis fin 2005 à la suite des lancements des deux satellites Giove-A et Giove-B en décembre 2005 et avril 2008, les deux premiers satellites de la constellation ont été lancés le 21 octobre 2011. A l'heure actuelle, huit satellites sont en orbite. Au final, il est prévu de mettre 30 satellites en orbite.

Le principe de la mesure de positionnement est globalement identique à ce qui est pratiqué pour la constellation GPS et, sur les trois bandes de fréquence utilisées par Galileo, une est commune avec GPS.

Les satellites possèdent à leur bord quatre horloges atomiques : deux horloges à Rubidium et deux masers passifs.



Les données numériques du problème sont :

$$\begin{aligned}R_T &= 6378 \text{ km} \\ Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \\ c &= 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \nu_{\text{Cesium}} &= 9192631770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Césium)} \\ \nu_{\text{Rubidium}} &= 6834682611 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Rubidium)}\end{aligned}$$

où R_T est le rayon terrestre, Gm est le paramètre gravitationnel standard de la Terre, et c est la vitesse de la lumière.

A - Choix de l'horloge et performances

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge atomique, que signifie en physique quantique le fait que l'oscillateur soit en résonance avec les atomes de référence ?

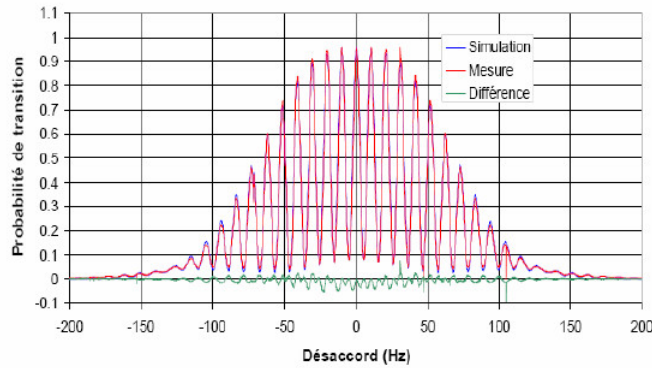
Solution: L'oscillateur est en résonance avec les atomes de référence lorsque la fréquence émise par l'oscillateur correspond à celle (à la largeur de raie près) d'une transition quantique de l'atome.

2. Décrire le principe des oscillations de Rabi. Quel paramètre physique détermine la largeur de la raie d'interaction ? Pourquoi est-ce difficile d'obtenir des mesures de grande précision avec une interaction unique ?

Solution: Lorsqu'une onde interagit avec un atome avec une fréquence proche de la résonance, la probabilité de transition entre les deux niveaux concernés va osciller en fonction du temps d'interaction à la pulsation de Rabi $\Omega = \frac{\mu_B B_0}{2\hbar} g$ (avec B_0 amplitude du champ magnétique, μ_B magnéton de Bohr et g facteur de Landé). Ce sont les oscillations de Rabi. La largeur de raie est alors proportionnelle à l'inverse du temps d'interaction. Pour obtenir des mesures de grande précision, il faut donc être capable de produire des interactions de longues durées ce qui est difficile à obtenir car cela nécessite une grande stabilité de la part de la source de l'onde (laser, oscillateur à quartz, ...).

3. Un prototype d'horloge au sol a été élaboré pour préparer une mission spatiale. En sortie de cette horloge, on observe les franges ci-dessous.

Comparaison simulation/expérience de franges de Ramsey



Quel processus physique permet d'obtenir de telles franges ? Pourquoi l'enveloppe des franges est-elle en forme de cloche ?

Solution: Les franges observées sont des franges de Ramsey. On obtient de telles franges en effectuant sur les atomes deux impulsions $\frac{\pi}{2}$ séparées d'une durée longue T pendant laquelle les atomes évoluent librement. Cette durée est appelée temps d'interrogation et est inversement proportionnelle à la largeur de la frange centrale. L'enveloppe des franges en forme de cloche correspond à la largeur de raie imposée par l'interaction de Rabi correspondant aux deux impulsions $\frac{\pi}{2}$.

4. Déterminer le temps d'interrogation des atomes pour le prototype d'horloge étudié dans la question précédente. Comment ce temps d'interrogation peut-il être modifié si une horloge analogue adaptée est satellisée ?

Solution: La largeur à mi-hauteur de la frange centrale est environ 5 Hz (il y a une dizaine de franges sur une gamme de 100 Hz). Le temps d'interrogation est alors : $T = \frac{1}{2\Delta\nu}$, c'est-à-dire : $T \simeq 0,2$ s. Pendant le temps d'interrogation, les atomes évoluent librement. La gravitation est donc une limite importante pour le temps d'interrogation. En satellisant une horloge, les atomes ne sont plus soumis à la gravitation et les temps d'interrogation peuvent être allongés jusqu'à quelques secondes.

5. Afin de choisir quel type d'horloge devrait voler pour Galileo, il a été utile de comparer les performances de deux fontaines existantes au sol : une ayant pour référence des atomes de Césium et une se servant d'atomes de Rubidium. Les exactitudes en fonction des phénomènes perturbatifs de ces deux horloges sont données dans le tableau ci-dessous.

Effet	Fontaine au Césium		Fontaine au Rubidium	
	Correction relative ($\times 10^{-16}$)	Incertitude relative ($\times 10^{-16}$)	Correction relative ($\times 10^{-16}$)	Incertitude relative ($\times 10^{-16}$)
Effet Zeeman quadratique	-1914	0,3	-3468	0,7
Radiation de corps noir	167,2	0,6	120,6	1,6
Collisions	246	2,5	8,4	1
Effet Doppler du premier ordre	0	3	0	2,5
Pureté spectrale	0	0,5	0	0,5
Autres	0	2	0	2

Déterminer les corrections totales relatives et absolues à appliquer sur les deux horloges ainsi que les incertitudes globales associées.

Solution: Correction :

Pour le Césium : $Cor_{rel} = (-1914 + 167,2 + 246) \times 10^{-16} = -1500,8 \times 10^{-16}$

$Cor_{abs} = -1500,8 \times 10^{-16} \times 9192631770 = -1,380 \text{ mHz}$

Pour le Rubidium : $Cor_{rel} = (-3468 + 120,6 + 8,4) \times 10^{-16} = -3339 \times 10^{-16}$

$Cor_{abs} = -3339 \times 10^{-16} \times 6834682611 = -2,282 \text{ mHz}$

Incertitude :

Pour le Césium : $In_{rel} = \sqrt{0,3^2 + 0,6^2 + 2,5^2 + 3^2 + 0,5^2 + 2^2} \times 10^{-16} = 4,467 \times 10^{-16}$

$In_{abs} = 4,467 \times 10^{-16} \times 9192631770 = 4,105 \times 10^{-6} \text{ Hz}$

Pour le Rubidium : $In_{rel} = \sqrt{0,7^2 + 1,6^2 + 1 + 2,5^2 + 0,5^2 + 2^2} \times 10^{-16} = 3,814 \times 10^{-16}$

$In_{abs} = 3,814 \times 10^{-16} \times 6834682611 = 2,607 \times 10^{-6} \text{ Hz}$

6. Quel est l'effet physique associé à la ligne du tableau intitulée "Doppler" ? Pourquoi a-t-on un déplacement nul et une incertitude non-nulle ?

Solution: L'effet Doppler est la conséquence des mouvements des atomes froids. Globalement, les atomes ont une vitesse nulle et donc un effet Doppler nul. Par contre, les atomes ont une température non-nulle ce qui correspond à une dispersion de vitesse non-nulle. L'incertitude sur l'effet Doppler a donc une valeur différente de zéro.

7. Comparer les performances des deux horloges et discuter des avantages et des inconvénients des deux systèmes en justifiant vos arguments.

Solution: L'avantage d'une horloge à Césium est d'utiliser l'étalon primaire pour la mesure du temps. La correction à appliquer est plus faible que pour une horloge à Rubidium. Cependant les effets des collisions est nettement plus faible dans une horloge à Rubidium ce qui induit des incertitudes plus faibles. Au final, les horloges à Rubidium sont de plus en plus utilisées pour réaliser des échelles de temps car les paramètres expérimentaux sont plus facilement contraints.

Au final, il a été décidé, ainsi que cela est dit en introduction, que chaque satellite dispose à bord de deux horloges à Rubidium (Rubidium Atomic Frequency Standard ou RAFS) et deux masers passifs (Passive Hydrogen Maser ou PHM).



Figure 1. RAFS flight model.

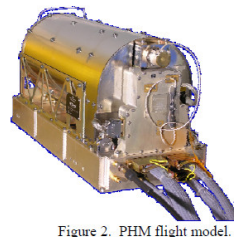
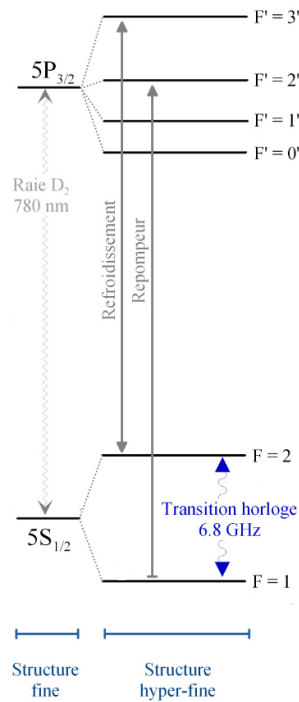


Figure 2. PHM flight model.

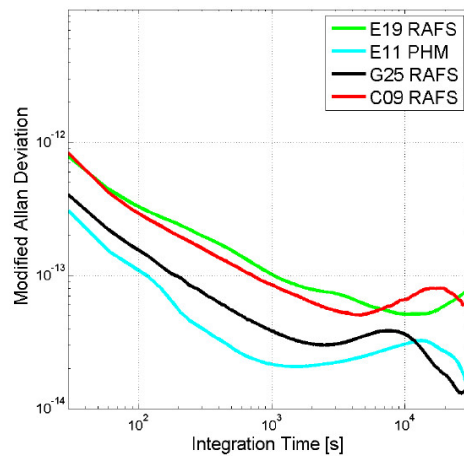
L'atome de rubidium a un électron de valence et sa structure atomique présente beaucoup de similarités avec celle du césium. Le diagramme ci-dessous montre quelques-uns des états de cet atome :



8. Donner les nombres quantiques des deux niveaux hyper-fins $5^2S_{1/2}, F = 2$ et $5^2P_{3/2}, F = 3$ ainsi que leurs degrés de dégénérescence. (Pour chacun de ces niveaux, il doit y avoir 6 nombres quantiques plus 1 correspondant à la dégénérescence).

Solution: On a $\vec{J} + \vec{I} = \vec{F}$ et donc $|j - i| \leq F \leq |j + i|$
 D'autre part : $-F \leq m_F \leq +F$ par pas de un.
 Etat $5^2S_{1/2} F = 2$: $n = 5$ (états internes) ; $s = 1/2s$; $\ell = 0$ (moment cinétique orbital) ;
 $j = 1/2$ (moment cinétique électronique total) ; $F = 2$ (moment cinétique total) ; $i = 3/2$
 (moment cinétique nucléaire)
 $m_F = -2, -1, 0, 1, 2$; la dégénérescence est de 5.
 Etat $5^2P_{3/2} F = 3$: $n = 5$; $s = 1/2$; $\ell = 1$; $j = 3/2$; $F = 3$; $i = 3/2$
 $m_F = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; la dégénérescence est de 7.

9. Les performances des horloges RAFS et PHM en terme de stabilité ont été mesurées en situation dans les premiers satellites Giove mis en orbite à partir de 2005. La variance d'Allan des horloges a été estimée en fonction du temps de mesure, donnant les courbes ci-dessous.



Comparer les performances des différentes horloges RAFS et PHM étudiées.

Solution: Le PHM a une stabilité de 2 à 5 fois meilleure que l'ensemble des RAFS jusqu'à 10^4 secondes. Au-delà de 10^4 secondes, les performances se rapprochent et le RAFS G25 devient même plus stable que le PHM. En fait, la bosse observée à 10^4 secondes résulte d'une erreur de détermination de l'orbite qui se répercute sur les observables des horloges.

10. Galileo propose différents services correspondant à des codes répartis sur plusieurs bandes de fréquence allant de 1164 à 1610 MHz. Suivant les positions des satellites Galileo, le signal de positionnement va traverser diverses parties de l'atmosphère terrestre. A partir des caractéristiques de l'ionosphère (à partir des documents distribués), démontrer que les fréquences de Galileo peuvent se propager à travers l'ionosphère.

Solution: La densité maximale d'électrons dans l'ionosphère d'après le schéma est de l'ordre de 10^{12} m^{-3} , dans le cours de Chenal, la valeur de $n_{0max} = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ est citée. Prenons cette dernière pour calculer la fréquence plasma :

$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{14} (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(8,85 \cdot 10^{-12})(0,9 \cdot 10^{-30})}} = 9 \cdot 10^7$ $f_p \approx 100 \text{ MHz}$ Cette fréquence plasma, même dans le cas le plus extrême pour la densité électronique, est notablement inférieure aux fréquences de Galileo. Les fréquences de Galileo traversent donc l'ionosphère.

B - Orbite

1. La période des satellites Galileo est d'environ 14h05mn. On considère qu'ils suivent une orbite circulaire. Calculez l'altitude et la vitesse d'un satellite de la constellation.

Solution: Pour une orbite circulaire de rayon a :

$$\vec{r} = a\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = a\dot{\phi}\vec{u}_\phi$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -a\dot{\phi}^2\vec{u}_r = -\frac{Gm}{a^2}\vec{u}_r$$

De plus $\dot{\phi} = 2\pi/T$. D'où :

$$a = \left(\frac{GmT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 2.960 \times 10^7 \text{ m}$$

$$v = a\dot{\phi} = \frac{2\pi a}{T} \simeq 3.669 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad (1)$$

2. On se place dans le cadre de la relativité générale. Dans le système de référence GCRS la métrique s'exprime :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2W(T, \mathbf{X})}{c^2} \right) c^2 dT^2 + \left(1 + \frac{2W(T, \mathbf{X})}{c^2} \right) \delta_{ij} dX^i dX^j \quad (2)$$

On suppose que $W(T, \mathbf{X}) = Gm/R$, avec $R = \delta_{ij} X^i X^j$.

- (a) Quelle est la relation entre temps propre et temps coordonnée, $(d\tau/dT)$, développée à l'ordre $1/c^2$?

Solution:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = - (1 - 2W/c^2) c^2 dt^2 + (1 + 2W/c^2) \delta_{ij} dx^i dx^j \\ \Rightarrow \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= 1 - \frac{2W}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + O(c^{-4}) \\ \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} &= 1 - \frac{W}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + O(c^{-4}) \end{aligned}$$

- (b) Donner la relation formelle ($d\tau/dT$) dans le cas d'un satellite Galileo ; dans le cas d'une horloge située à la surface de la Terre, fixe par rapport à celle-ci et à une latitude de 43 degrés.

Solution: Pour un satellite Galileo :

$$\left[\frac{d\tau}{dt} \right]_{\text{Galileo}} = 1 - \frac{Gm}{ac^2} - \frac{v^2}{2c^2}$$

où a et v sont donné par (1). La vitesse de l'horloge au sol dans GCRS (référentiel non tournant centré sur la Terre) est donnée par $v_c = R_T \Omega_T \cos \lambda$. D'où :

$$\left[\frac{d\tau}{dt} \right]_c = 1 - \frac{Gm}{R_T c^2} - \frac{v_c^2}{2c^2}$$

- (c) Quelle est la différence de fréquence relative (théorique) entre une horloge Galileo et l'horloge au sol considérée précédemment ? Donner une valeur numérique.

Solution: D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\tau}{dt} \right]_{\text{Galileo}} - \left[\frac{d\tau}{dt} \right]_c &= \frac{Gm}{c^2} \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right] + \frac{v_c^2 - v^2}{2c^2} \\ &\simeq 5.45 \times 10^{-10} - 7.4 \times 10^{-11} \simeq 4.7 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

- (d) Le système Galileo permet de comparer les horloges du satellite et l'horloge sol considérée avec une exactitude de l'ordre de la nanoseconde. Au bout de combien de temps peut-on détecter la correction relativiste ?

Solution: En supposant les deux horloges synchronisées au début de l'expérience, la différence de temps propre est égale à 1 ns après :

$$\frac{1 \text{ ns}}{4.3 \times 10^{-10}} \simeq 2.1 \text{ s}$$