

# 1. Echelle de temps

## 1.1 Introduction

Définition actuelle d'une échelle de temps

1. Uniforme (stable)
2. Reproductible
3. Universel (au sens de la relativité : même définition pour le temps propre)

La vitesse du centre de masse d'un corps, soumis à aucune force, est constante (le principe de moindre action) :

$$\frac{dx}{dt} = Cte \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{Eq. 1}$$

Où  $x$  est la position du centre de masse et  $t$  le temps scientifique uniforme. Expérimentalement je mesure le temps avec une horloge qui délivre un temps  $T$  et je dois respecter ce principe. Alors en multipliant haut et bas par  $dT$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dt} = Cte \quad \forall dT \quad \text{Eq. 2}$$

En dérivant une seconde fois :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dt} \right) = 0 = \frac{d^2x}{dt dT} \frac{dT}{dt} + \frac{dx}{dT} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dT} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{dx}{dT} \frac{d^2T}{dt^2} \quad \text{Eq. 3}$$

Cette égalité est satisfaite pour toute  $x$  si et seulement si :

$$\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \quad \text{donc si } T \text{ est uniforme} \quad T = at + b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ constante.}$$

Le coefficient  $b$  peut être choisi, par définition, fixé à un événement précis. Donc l'échelle de temps est entièrement défini par le coefficient  $a$ . Il doit être stable (indépendant du temps en moyenne. Moyenne prise sur la durée à mesurer à partir de l'évènement  $b$ ) pour donner une échelle uniforme. Il doit être aussi reproductible pour toujours fournir la même durée à des dates différentes. Pour quantifier ces propriétés, le terme utilisé en métrologie est la stabilité.

En outre, pour comparer des résultats provenant d'horloges différentes, il faut connaître les valeurs  $a_i$  des horloges par rapport à une définition unique du temps. L'incertitude sur ces valeurs est donnée par l'exactitude des horloges.

Donc toute mesure de durée doit être associée à une valeur de stabilité et à une valeur d'exactitude (cela devrait être aussi appliqué à toutes mesures physiques).

## 1.2 Représentation du temps

La représentation du temps se fait au travers d'un phénomène physique de loi connue et les phénomènes les plus pratiques et les plus simples à visualiser sont les mouvements périodiques (mouvements bornés). Mesurer une durée  $D$  revient à compter le nombre d'oscillations et à évaluer l'amplitude du mouvement au début et à la fin de la mesure.

Le mouvement mesuré :  $A \sin 2\pi \frac{t}{T}$

La durée  $D$  déduite :

$$D = nT + \varepsilon T$$

où  $n$  est un entier,  $T$  est la période du signal et  $0 < \varepsilon < 1$ .

Il existe 2 sources d'erreur sur la détermination de  $D$  : la période  $T$  et l'amplitude du signal qui influence essentiellement la valeur de  $\varepsilon$  : si nous comptons les passages par zéro du signal l'amplitude a moins d'effet sur la valeur de  $n$  à la condition que l'amplitude du mouvement ait une valeur élevée par rapport au bruit de mesure.

Si nous supposons que l'amplitude  $A$  est indépendante du temps, mesurer une durée  $D$  revient donc à mesurer la variation de phase du signal puisque :

$$\Delta\varphi = 2\pi \int_D \nu dt$$

La durée  $D$  est donc définie sans ambiguïté si la fréquence du signal reste constante :

$$\Delta\varphi = 2\pi \int_D \nu_0 dt = 2\pi\nu_0 D \quad \forall D$$

Si  $\delta\nu_0$  est l'incertitude sur la fréquence alors l'incertitude sur le temps (à condition que la mesure  $\Delta\varphi$  soit sans erreur) est :

$$dD = D \frac{\delta\nu_0}{\nu_0}$$

En réalité il y aura du bruit (bruit intrinsèque au phénomène, bruit de mesure dans l'horloge)

et donc la phase mesurée s'écrira :  $\varphi(t) = 2\pi\nu_0 t + \delta\varphi(t)$  .

C'est la statistique sur  $\delta\varphi(t) = \int \delta\nu(t) dt$  ou sur  $\delta\nu(t)$  qui qualifiera la stabilité de l'horloge.

## 1.2 La mesure de la variance

L'outil statistique utilisé est la variance de fréquence qui donne la dispersion des points de mesure de fréquence autour de la valeur moyenne :

$$\sigma^2 = \langle \delta\nu^2 \rangle - \nu_0^2$$

Pour qualifier la stabilité d'une horloge il faut donc mesurer sa fréquence par rapport à un deuxième dispositif indépendant. La variance mesurée sera donc la somme des variances des 2 dispositifs :

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 .$$

Si le deuxième dispositif a une bien meilleure stabilité alors nous obtenons le résultat recherché.

Si le deuxième dispositif est identique au premier alors le résultat doit être divisé par  $\sqrt{2}$ .

Si le deuxième dispositif n'est pas très bien connu alors il en faut un troisième pour avoir les 3 comparaisons et en déduire par somme et différence le résultat recherché :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 , \sigma_1^2 + \sigma_3^2 , \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

Pour avoir un échantillon statistique il faut donc réaliser de nombreuses mesures de la fréquence. En pratique la mesure donne une fréquence moyenne sur une durée D

$$v_i = \frac{1}{D} \int_{t_i}^{t_i+D} v(t) dt$$

et on répète la mesure pour faire la statistique sur les  $v_i$  et obtenir la variance. Mais le bruit de mesure se moyennera différemment selon la valeur de la durée D. Donc pour qualifier une horloge il faut établir une variance pour plusieurs durées.

On va prendre alors des échantillons de comparaison de durée  $\tau$  :

$$v_i = v(t_i) = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} v(t) dt = v_0 + \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} \delta v(t) dt$$

et calculer la variance :

$$\sigma^2(\tau) = \langle v_i^2 \rangle - v_0^2$$

Puis à partir de ces échantillons calculer un nouvel échantillon sur  $2\tau$  avec

$$v'_i(2\tau) = \frac{v(t_i) + v(t_i + \tau)}{2}$$

Etc...

Dans le calcul de la variance  $v'^2_i(2\tau)$ , on voit apparaître la valeur moyenne du produit :

$$\langle v(t)v(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t)v(t + \tau) dt$$

qui est la fonction d'auto corrélation de la fonction  $v(t)$ . La transformée de Fourier de la fonction d'auto corrélation est la densité spectrale de fréquence  $S_v(\Omega)$  qui est aussi une grandeur mesurable. La variance s'exprime donc aussi en fonction de  $S_v(\Omega)$  (unité  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$ ) sous la forme :

$$\sigma^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\Omega) H(\Omega, \tau) d\Omega$$

où H est une fonction de transfert (un filtre) et  $\Omega$  la fréquence de Fourier. Pour la variance définie ci-dessus H représente dans l'espace de Fourier la valeur moyenne sur le temps  $\tau$  :

$$H(\Omega, \tau) = \frac{\sin^2 \pi \tau \Omega}{(\pi \tau \Omega)^2}$$

En pratique il est plus commode d'utiliser une autre définition de la variance inventée par D. Allan :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{V_0^2} \langle (v_i - v_{i-1})^2 \rangle$$

Dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(\Omega, \tau) = \frac{\sin^4 \pi \tau \Omega}{(\pi \tau \Omega)^2}$$

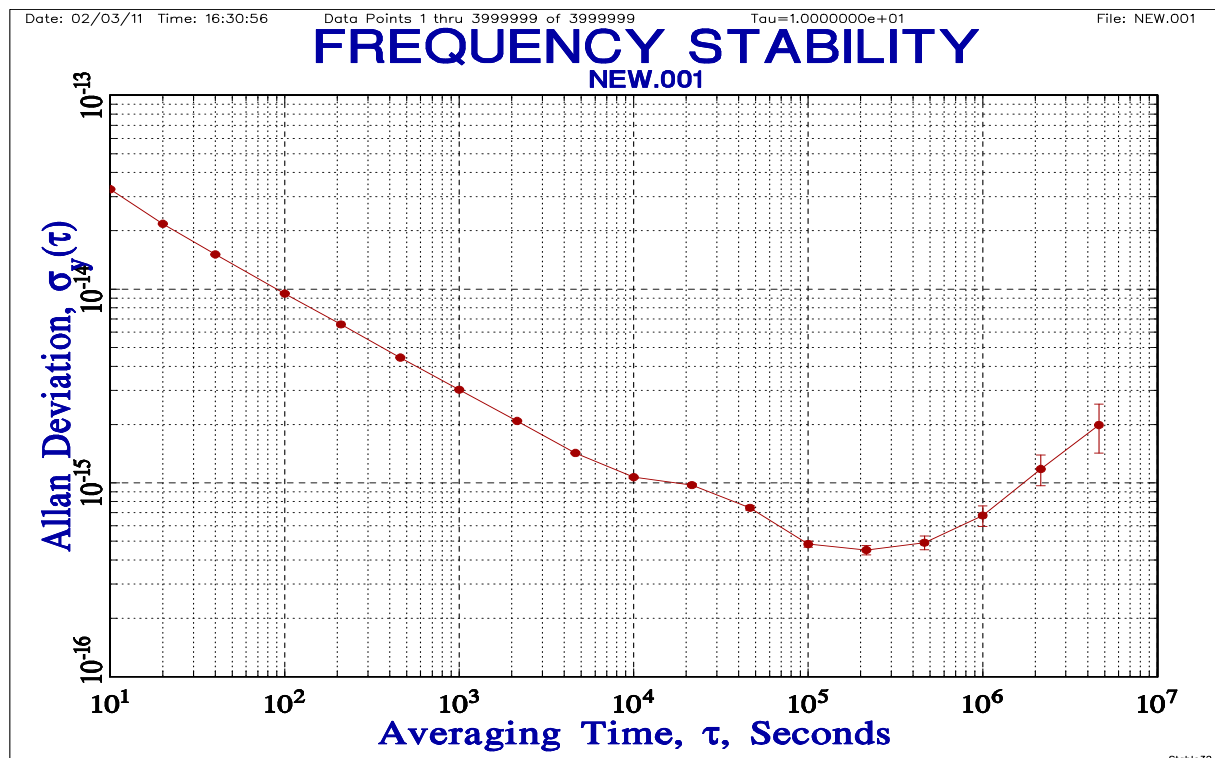
En général on caractérise la stabilité de fréquence sur des temps courts (<10s) avec la densité spectrale et avec la variance sur des durées plus longues.

La densité spectrale peut le plus souvent s'exprimer sous la forme d'un polynôme :

$$S_v(\Omega) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha \Omega^\alpha$$

dans laquelle chaque puissance  $\alpha$  entière caractérise un type de bruit : le bruit blanc de fréquence  $\alpha=0$ , le bruit flicker de fréquence  $\alpha=-1$  pour les plus significatifs.

La stabilité de fréquence d'une horloge est alors décrite par un graphique représentant  $\sigma_y$  en fonction du temps de mesure et on obtient ce type de graphique:



Sur des durées jusqu'à 1 jour la stabilité s'améliore, ensuite elle est à peu près constante entre 1 et 10 jours (l'horloge donne donc sa meilleure performance sur cette intervalle de durée) et finit par se dégrader sur des durées plus longues.

### 1.3 La date initiale

La phase initiale, le temps zéro,  $\varphi_0$  doit être choisi à une valeur fixe. La datation des événements se fait en temps MJD (Modified Julian Day). Le jour Julien (défini au 16<sup>ème</sup> siècle) démarre à midi au 1<sup>er</sup> Janvier -4712. La période julienne est de 7980 ans et elle correspond à 3 cycles périodiques : solaire 28 ans, lunaire 19 ans et administrative (par les romains) 15 ans. Ces trois cycles sont donc à 1 en -4712. Une année dure 365.25 jours. Le jour Julien modifié en 1950 en retire 2400 000,5 jours (0,5 jour pour commencer à minuit). Le 24 janvier 2011 correspond à 55585 MJD.

### 1.3 La représentation du temps

Mesurer le mouvement et donc indirectement un temps a toujours été une des préoccupations fondamentales des scientifiques. En parallèle, l'organisation de la société impose une régulation dans les échanges ; le temps a un prix.

Comme représentation physique, le mouvement de rotation de la terre possède de très bonnes caractéristiques : son mouvement est de grande amplitude (facile à sub-diviser), il est accessible par tout le monde et sa période semblait être une constante de l'univers.

Le mouvement apparent du soleil avec son extrême régularité a conservé pendant des millénaires son rôle fondamental dans la définition d'une échelle de temps : il est unique, uniforme et accessible par tous les habitants du globe.

Pour s'y référencer facilement, le gnomon constituait le plus simple et le plus ancien instrument de visualisation: son utilisation remonte à plusieurs millénaires. C'est un simple bâton planté verticalement ; les variations de l'angle et de la longueur de l'ombre projetée indiquent la position du Soleil à la fois dans la journée (à midi, l'ombre est la plus courte) et dans l'année (à la même heure, l'ombre est plus longue en hiver). En outre le moment où l'ombre correspondait précisément à la taille du bâton servait de mesure-étalon: l'ombre de tous les objets indiquait alors leur taille exacte.

C'est à l'aide de cet objet simple que le Grec Ératosthène, trois siècles avant notre ère, mesura la circonférence de la Terre. À partir de la différence d'angle ( $7^{\circ}12'$ ) relevée, au solstice<sup>1</sup> d'été à midi, entre l'ombre de deux gnomons, situés l'un à Syène (Assouan), l'autre à Alexandrie, il calcula une distance de 5000 stades, soit 250 000 stades pour la circonférence terrestre (39 600 au lieu de 39985 km) ; la petitesse de l'erreur est prodigieuse.

Le gnomon fut perfectionné et son successeur, le cadran solaire, perpétua pendant des siècles cette visualisation du temps de référence. La variété des spécimens jusqu'au modèle de poche (18<sup>ème</sup> siècle) exprimait son rôle premier.

Pour un usage plus commode dans la vie sociale et pour conserver le temps, l'imagination humaine a exploité de nombreux procédés naturels pouvant se substituer au mouvement terrestre (à l'échelle de la journée). Les dispositifs à écoulement d'eau, les clepsydres, (et de sable, les sabliers) semblent être les premiers instruments de mesure. On retrouve la trace de l'usage de clepsydres 3000 ans avant notre ère. Il s'agissait simplement de mesurer la hauteur d'eau dans un récipient percé d'un trou à sa base ou dans un réceptacle. Des dispositifs plus évolués furent développés : les clepsydres poly vasculaires réalisant un écoulement régulier de l'eau (-52) ou munies d'un siphon pour vider le réceptacle tout en incrémentant un compteur afin d'assurer des mesures plus longues ; les sabliers qui assurent un écoulement plus lent et moins dépendant des conditions extérieures (mais lié à la qualité du sable, uniformité des grains...). La combustion fut aussi largement utilisée : la hauteur d'une bougie, la hauteur d'huile ou la longueur d'une mèche. Au début de notre ère, on trouve la trace de réveils basés sur la combustion d'une mèche.

---

<sup>1</sup> Le jour le plus long de l'année.

La précision de tels instruments est toujours très faible, mais suffisante si le temps mesuré est court.

L'invention de l'horloge mécanique date du moyen âge. L'horloge mécanique possède quatre éléments essentiels : l'organe moteur, le rouage, l'échappement et le régulateur. L'organe moteur était à l'origine uniquement un poids mais, dès le *XVe* siècle, pour les horloges portatives, il fut remplacé par un ressort, lame d'acier enroulée en spirale, enfermé dans un tambour denté, le barillet. Le rouage, à roues et pignons dentés, a deux fonctions : il distribue l'énergie à l'échappement et transmet le mouvement à des aiguilles pour afficher l'heure. L'échappement fournit l'énergie par impulsions discrètes au régulateur chargé d'assurer la constance de la marche.

Le régulateur était le point faible des premières horloges. C'était au début un foliot, simple traverse portant deux régules pour ajuster la durée des oscillations. Il ne possédait pas de période propre, celle-ci dépendant de la force fournie par l'échappement. Bien vite, on tenta de pallier partiellement ce défaut en limitant l'amplitude du mouvement du foliot par deux butées élastiques, fabriquées à l'origine avec des soies de porc.

Une première révolution est introduite par Galilée<sup>2</sup>. Il formule la loi d'isochronisme du pendule, après avoir observé (avec une clepsydre) le balancement d'un lustre dans la cathédrale de Pise : la durée d'une oscillation ne dépend que de la longueur du pendule et non pas de l'amplitude du mouvement<sup>3</sup>. Et il établit le principe de relativité : les lois physiques régissant un phénomène ne sont pas troublées par le mouvement du système considéré. Les lois du mouvement d'un mobile donné sont les mêmes pour tous les observateurs, qu'ils soient ou non eux-mêmes en mouvement (rectiligne et uniforme). Ces observateurs ne sont plus privilégiés : ils deviennent équivalents. Newton<sup>4</sup> complétera cette analyse en introduisant la notion de temps absolu « Le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée ».

Christiaan Huygens<sup>5</sup> créa en 1657 la première horloge à pendule pesant et, en 1675, la première montre à résonateur balancier-spiral<sup>6</sup>. Dès le *XVIIe* siècle, on a cherché à utiliser les horloges pour la détermination de la longitude en mer. En 1762, John Harrison gagna le prix du Parlement britannique, décerné au savant qui donnerait une solution à ce problème, avec sa « montre marine no 4 » dont le retard, lors de son premier voyage en Jamaïque, ne dépassa pas cinq secondes en deux mois.

La formule générale du pendule montre que la période dépend de la latitude par l'intermédiaire de l'accélération terrestre  $g$ . Une horloge réglée à l'équateur avance de 226 secondes par jour lorsqu'elle se trouve au pôle. La période dépend aussi de la pression barométrique, d'où la nécessité de faire une correction de poussée de l'air, et surtout de la

---

<sup>2</sup> Galilée (Galileo Galilei) naît à Pise en 1564 et meurt à Florence en 1642 ;

<sup>3</sup> En réalité le mouvement d'un pendule dépend de l'amplitude. La fréquence d'un pendule est approximativement donnée par :

$$\nu \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left( 1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \text{ où } g \text{ est l'accélération de pesanteur, } l \text{ la longueur du pendule et } \theta_0 \text{ l'amplitude}$$

maximale du pendule

<sup>4</sup> Isaac Newton (1642-1727), physicien et mathématicien anglais.

<sup>5</sup> Christiaan Huygens (1629-1695), scientifique hollandais, naît et meurt à La Haye.

<sup>6</sup> La fréquence du mouvement est donnée par :  $\nu \approx \sqrt{\frac{C}{I}}$  où  $I$  est le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe et  $C$  est le couple de rappel du spiral pour un angle d'un radian. Le couple de rappel peut aussi dépendre de l'amplitude.

température, à cause de la dilatation du bras oscillant. La longueur du pendule augmente quand la température s'élève et sa fréquence diminue ; avec une tige en acier, une horloge retarde de 0,5 seconde par jour quand la température augmente de 1°C. En 1715, G. Graham a réalisé la compensation avec un pendule dont la lentille creuse était remplie de mercure. Lorsque la température s'élève, la tige du pendule s'allonge, ce qui abaisse le centre de gravité, mais le mercure se dilate vers le haut et le fait remonter. L'acier se dilatant environ cinq fois moins que le mercure, en dosant judicieusement ce dernier on peut maintenir constante la longueur active  $l$  du pendule dans les limites des températures usuelles. C'est l'un des premiers exemples connus de mécanisme d'autorégulation.

En 1753 J. Harrison propose une version transportable et plus robuste : le pendule à gril bimétallique. La tige du pendule est formée de plusieurs tringles alternativement en acier et en laiton assemblées de telle façon que les unes se dilatent vers le bas, les autres vers le haut.

Puis, en 1897, Charles-Édouard Guillaume invente l'invar, alliage de fer et de nickel à 36 p. 100 de nickel, dont le coefficient de dilatation linéaire est, à la température ambiante, près de dix fois plus petit que celui de l'acier. Le faible résidu de dilatation est compensé en faisant reposer la masse du pendule sur un court cylindre en laiton fixé au bas de la tige et se dilatant vers le haut. Cette solution fut adoptée pour toutes les horloges astronomiques à pendule jusqu'à leur remplacement par les horloges à quartz.

La fin du 19<sup>ème</sup> siècle marque le début de la seconde révolution relativiste du temps. L'expérience de 1887 de Michelson et Morley et son résultat négatif a prouvé l'équivalence inconditionnelle entre une longueur optique et une longueur matériel (indépendance de la vitesse de la lumière). Prendre à la fois la longueur d'onde  $\lambda$  et la période  $T$  d'une onde électromagnétique comme références de longueur et de temps, c'est imposer comme constante absolue la vitesse  $c$  qui les relie par la relation  $\lambda = cT$ . Dans ces conditions l'invariant d'espace-temps  $s$  est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Ce sont les formules du groupe de Lorentz-Poincaré et les bases du concept de l'espace-temps pseudo-euclidien de Poincaré-Minkowski (1908) ; ce concept succède à l'espace d'Euclide en tant que cadre descriptif des phénomènes physiques. Mais le théoricien qui a vraiment saisi l'essence de la nouvelle théorie avec toutes ses implications est Einstein (1905). Chaque repère inertiel est désormais pourvu de son temps local, ou propre, et devient ainsi un repère spatio-temporel, repère cartésien de l'espace-temps. Pour cette raison, les repères inertiels sont désormais dits lorentziens plutôt que galiléens. Einstein généralisera ensuite cette théorie à la gravitation et généralisera le principe d'équivalence : la masse inertielle est égale à la masse gravitationnelle. Une masse ou énergie déforme l'environnement spatio-temporel, c'est la métrique de la relativité générale.

Pour la recherche des améliorations des horloges, l'électricité d'abord, l'électronique ensuite ont joué, dès leur apparition, un rôle déterminant dans la mesure du temps : en chronométrie de haute précision comme en horlogerie courante. 1920 marque l'époque des premiers travaux consacrés aux horloges à quartz. Auparavant, les meilleures horloges à gravité (pendules de précision des observatoires) atteignaient très difficilement une stabilité de la milliseconde par jour (stabilité relative de  $10^{-8}$ ).

Le quartz (bioxyde de silicium, silice pure) cristallise dans le système rhomboédrique. Il a des propriétés élastiques et thermoélastiques intéressantes. Le cristal est piézo-électrique, ce qui permet d'utiliser cette propriété comme transducteur d'entretien intégré avec le résonateur. La piézo-électricité de certains cristaux a été mise en évidence par les frères Curie en 1880 (quartz, sel de Seignette, tourmaline).

Un résonateur à quartz peut être un barreau, un disque, une lame, un diapason, une lentille de dimensions précises et traitée, selon des orientations très particulières dans le cristal pour obtenir les fréquences recherchées et les propriétés thermoélastiques optimales. Ces éléments taillés et polis sont ensuite métallisés sur certaines de leurs faces afin de permettre la mise en œuvre des propriétés piézo-électriques. Suspendu ou encastré, soumis à une tension électrique alternative, un tel système peut vibrer et entrer en résonance. Ces résonateurs sont généralement encapsulés dans des enceintes à vide ou sous atmosphère neutre.

Les premiers travaux sur les quartz résonants pour applications chronométriques sont dus à W. G. Cady, en 1921. Scheibe et Essen, en 1929-1930, construisirent des horloges à quartz en partant de résonateurs en forme de barreau (Scheibe) ou d'anneau (Essen). Dans les horloges de haute précision, le résonateur est presque toujours placé dans un thermostat. Le premier résonateur à quartz pour montre a été réalisé au Centre électronique horloger de Neuchâtel en 1966-1967. C'était un barreau à 8 192 Hz encapsulé sous vide. Puis on a réalisé des résonateurs à quartz de coupe AT qui oscillent à quelques mégahertz.

Avec ces oscillateurs, le Bureau international de l'heure à Paris (*B.I.H.*) a confirmé dès 1933 l'existence de variations saisonnières et séculaires dans la rotation de la Terre. En 1941, par exemple, l'amplitude de la variation saisonnière a dépassé 4 millisecondes (amplitude de la moyenne mensuelle des écarts). C'est tout à fait insuffisant pour les besoins de la science moderne. Mais les quartz eux-mêmes ont une fréquence qui dépend de la méthode de fabrication, de la température et du vieillissement du cristal. Il faut donc les étalonner périodiquement par rapport à une référence.

Les atomes ou molécules sont constitués de particules élémentaires liées entre elles par les interactions fondamentales. Les écarts entre les différents états atomiques expliqués par la mécanique quantique définissent des résonances à des fréquences qui peuvent être très stables. En 1948, le National Bureau of Standards aux *USA*, réalise la première horloge atomique. Elle utilise la raie à 24 *GHz* de l'ammoniac. Puis en 1955, Essen et Parry développe, au Royaume-Uni, la première horloge à césium en tirant parti des résultats théoriques de Isaac Rabi et Norman Foster Ramsey.

Plusieurs échelles de temps ont été définies sur le mouvement terrestre:

- Le temps universel UT : la seconde est 1/86400 partie du jour solaire moyen avec des déclinaisons différentes UT0 rapporté à un pôle fixe, UT1 rapporté au pôle instantané, UT2 corrigé des variations saisonnières. UT1 à une incertitude inférieure à 1 ms après 1 mois ( $10^{-8}$ - $10^{-9}$ )
- Le temps des éphémérides est apparu à cause des irrégularités de la rotation terrestre. Il est obtenu comme solution d'une équation qui donne la longitude du soleil. La seconde devient 1/315569258.9747 partie de l'année tropique 1900. Elle complète UT en 1956 et sur plusieurs siècles l'incertitude atteint  $10^{-9}$ .

Mais la maîtrise de mouvements périodiques de fréquence de plus en plus élevée (oscillateur à quartz, résonances atomiques) a détrôné en 1967 ce temps astronomique au profit du temps atomique. Ce dernier étant beaucoup plus stable et plus exact, il est devenu nécessaire d'intégrer la relativité générale dans le système de coordonnées. Le Temps Atomique International repose sur les données de centaines d'horloges atomiques corrigées des effets relativistes : c'est l'échelle de temps de référence TAI.

Pour conserver un lien avec UT, on utilise couramment le Temps Universel Coordonné UTC (pour l'organisation sociale). Il repose sur les données des horloges atomiques mais il diffère de TAI par un nombre entier de secondes (33s). Il est en effet réajusté pour respecter  $|UTC-UT1| < 0.9s$  (la durée d'une année astronomique augmente de 0.7s par an, en parti à cause du ralentissement de la terre par dissipation des effets de marée).



Cette seconde intercalaire se produit environ 1 fois tous les 2 ans. Avec le développement des systèmes de navigation GPS, GLONASS, GALILEO qui diffusent un temps atomique des discussions sont engagées pour supprimer cette seconde intercalaire et passer à une heure intercalaire (en 3000 !).

En relativité générale la métrique est définie par le tenseur  $g_{\alpha\beta}$  où la valeur des coefficients est liée à la distribution d'énergie. Pour décrire le système terrestre, on a en général recours à trois systèmes de coordonnées :

- Le système barycentrique avec pour origine le barycentre des masses du système solaire et son temps coordonné TCB et d'espace ICRF.
- Le système géocentrique au barycentre de la terre.(TCG, ICRF).
- Le système géocentrique tournant avec la terre (TT et ITRF).

### 3. Structure atomique

#### 3.1 Mécanique quantique : Rappels

1. L'état d'un système est défini par une fonction d'état  $\Psi(t)$  (en mécanique classique ce sont les données  $r$  et  $p$  qui décrivent le système).
2. Toute grandeur mesurable  $a$  est décrite par un opérateur  $A$  agissant dans l'espace des états.
3. La mesure d'une grandeur physique ne peut donner comme résultat qu'une valeur propre de  $A$ .
4. L'évolution de  $\Psi(t)$  est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H \Psi(t)$$

où  $H$  est l'hamiltonien du système. Les états propres de  $H$  sont des états stationnaires (énergie constante) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H \Psi(t) = E \Psi(t) \Rightarrow \Psi(t) = C e^{-iE/\hbar}$$

#### 3.2 Les états d'énergie atomiques

L'objectif est de déterminer les états atomiques stationnaires pour en déduire le diagramme d'énergie avec la meilleure exactitude et les résonances possibles lorsque l'atome est soumis à un champ électromagnétique. On ne s'intéressera ici qu'aux modifications des états électroniques ; c'est-à-dire pour des énergies inférieures à une dizaine d'eV.

Prenons l'exemple d'un électron en interaction avec un proton : l'atome d'hydrogène ou en première approximation des atomes alcalins. Dans la suite on négligera le mouvement du proton et à fortiori du noyau. L'énergie totale de l'atome se réduit donc à celui de l'électron :

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Où  $P$  est l'impulsion de l'électron et  $m$  sa masse. L'interaction principale avec le noyau est d'origine électrostatique et est décrite classiquement par un potentiel central :

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} = -\frac{e^2}{r}$$

Puisque le potentiel est central, il y a conservation du moment cinétique total et on peut donc s'attendre à ce que les états d'énergie se décomposent aussi selon la valeur du moment cinétique total. L'opérateur hamiltonien est donc la somme de  $E + V(R)$  où les quantités  $P$  et  $R$  deviennent des opérateurs dans l'espace des états atomiques. La difficulté est que l'on ne peut pas résoudre directement un tel système et il va donc falloir décomposer le problème en approximations successives.

Rechercher le hamiltonien dans un cadre relativiste ou bien non-relativiste + des corrections ? On pourrait alors écrire l'énergie sous la forme plus simple :

$$E = c \sqrt{P^2 + m^2 c^2} \approx m c^2 + \frac{P^2}{2m} + \dots$$

si la vitesse de l'électron est petite devant c.

Il faut donc déterminer l'ordre de grandeur de v/c où v est la vitesse de l'électron ? Le hamiltonien deviendrait donc<sup>7</sup>:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{R}$$

Déterminons l'ordre de grandeur de P en calculant une valeur approximative de H. Pour cela nous utiliserons le principe d'incertitude de Heisenberg (une des relations les plus importantes de la mécanique quantique) qui énonce :

$$\Delta p \Delta r \geq \hbar$$

où  $\Delta f = \sqrt{\langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}$  représente l'écart type des mesures.

Cette incertitude montre qu'il n'est pas possible de mesurer à la fois la position et la vitesse d'une particule avec une dispersion nulle.

Si on maximise  $\Delta r$  par la valeur moyenne  $\langle r \rangle$  alors  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\langle r \rangle}$ .

Et pour les énergies les plus basses  $\langle P^2 \rangle$  sera du même ordre que  $\left(\frac{\hbar}{\langle r \rangle}\right)^2$ . L'électron étant en oscillation, en moyenne  $\langle P \rangle = 0$ .

Nous trouvons donc que l'énergie moyenne est :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m\langle r \rangle^2} - \frac{e^2}{\langle r \rangle}$$

L'orbite la plus stable est obtenue lorsque la dérivée de E s'annule :

$$\frac{d}{d\langle r \rangle} \left( \frac{\hbar^2}{2m\langle r \rangle^2} - \frac{e^2}{\langle r \rangle} \right) = 0$$

<sup>7</sup> Puisque on considère une interaction à 2 corps, la masse m à prendre en compte est la masse

réduite  $m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$ .

$$\frac{d}{d\langle r \rangle} \left( \frac{\hbar^2}{2m\langle r \rangle^2} - \frac{e^2}{\langle r \rangle} \right) = -2 \frac{\hbar^2}{2m\langle r \rangle^3} + \frac{e^2}{\langle r \rangle^2} = 0$$

On en déduit le rayon de Bohr :

$$\langle r \rangle = a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \cong 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

et le module de l'impulsion  $mV = \frac{\hbar}{\langle r \rangle}$  :

$$\frac{me^2}{\hbar} = mV$$

D'où le rapport  $V/c$  :  $\frac{V}{c} = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \approx 1/137,036$  où  $\alpha$  est la constante de structure fine qui caractérise les interactions électromagnétiques (nombre sans dimension, indépendant du système d'unité). Dans cette démonstration, la signification de  $\alpha$  est claire puisque son carré représente le rapport de l'énergie de l'interaction électromagnétique ( $mV^2$ ) sur l'énergie totale ( $mc^2 \sim 0.5 \text{ MeV}$ ). Cela est uniquement valable pour le domaine d'énergie considéré ( $< \text{MeV}$  ou sur une échelle spatiale donnée par la longueur d'onde de Compton  $h\nu = hc/\lambda = mc^2 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mc} \approx 2.410^{-12} \text{ mètres}$ ). Au delà, on change progressivement de physique puisque l'échelle d'observation devient de plus en plus fine.

Le rapport  $V/c$  étant faible, on pourra donc utiliser le hamiltonien classique puis traiter les corrections relativistes en perturbation.

Il faut donc résoudre  $\left( \frac{P^2}{2m} + V(r) \right) \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z)$  où  $P$  est associé à l'opérateur

gradient :  $P = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ .

Cette équation se résout exactement et on trouve que la fonction  $\Psi$  dépend de 3 nombres quantiques entiers  $n$ ,  $l$  et  $m_l$  où  $l$  caractérise le moment cinétique (grandeur vectorielle  $\hbar \vec{L}$  de module  $\hbar \sqrt{l(l+1)}$ ) et  $\hbar m_l$  sa projection sur un axe (l'orientation du moment cinétique).

Ces 3 entiers vérifient :

$$n \geq l + 1 \text{ et } -l \leq m_l \leq l$$

et les différents états d'énergie ne dépendent que de  $n$  :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_1$$

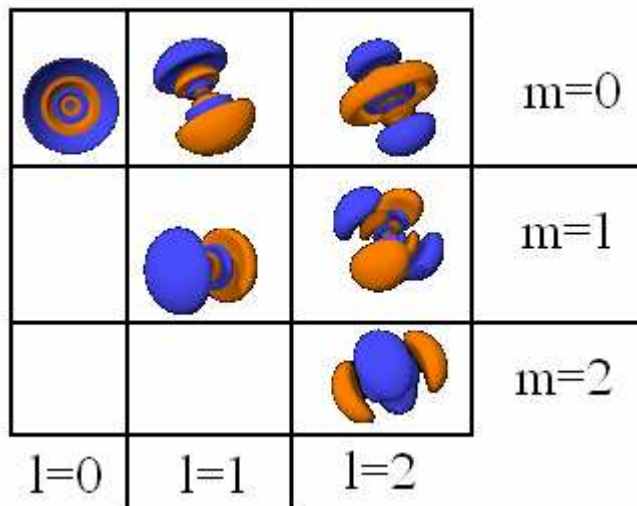
et  $E_1 = \frac{1}{2} \alpha^2 m c^2$  est l'énergie d'ionisation ( $\sim 13,6$  eV).

Tous les états de même  $n$  sont donc dégénérés.

En notation spectroscopique les états  $l=0$  sont notés s,  $l=1$ , p,  $l=2$ , d, etc...

#### 4.1 Atomes alcalins à plusieurs électrons $Z$

Pour ces atomes le potentiel de l'électron périphérique varie comme  $-e^2/r$  à longue distance et comme  $-Ze^2/r$  à courte distance du noyau. Son énergie va donc varier selon la forme de son orbite et donc selon son moment cinétique  $l$ . Par exemple un états  $nS$  est plus fortement couplé que l'états  $nP$  puisque les fonctions d'onde  $P$  sont moins pénétrantes que les  $S$ .



Il y aura donc une levée de dégénérescence des états  $n, l, m_l$ . L'énergie dépend donc de  $n$  et de  $l$ , et sera fonction de  $\alpha^2$  et  $(Z\alpha)^2$ . En conséquence suivant la valeur de  $Z$ , l'écart entre les niveaux d'énergie va changer. Et si la constante de structure fine varie alors le rapport de cet écart entre 2 atomes différents variera. C'est un des enjeux de la physique moderne : étudier la stabilité des constantes fondamentales.

#### **l'électrodynamique quantique**

Dans ce formalisme les champs sont quantifiés et le couplage électron proton se fait au travers de l'échange de photons. Ainsi on fait apparaître de nouvelles interactions avec le vide de champ. La nature de ces interactions est aussi dépendante de la distance électron proton et donc du moment de l'orbite. C'est pourquoi sur l'atome d'hydrogène les états  $2s$  et  $2p$  ne sont plus dégénérés : c'est le déplacement de Lamb (Lamb shift).

## 4.2 Les états de spin

Au trois nombres quantiques  $n, l, m_l$  il faut aussi rajouter le moment cinétique intrinsèque de l'électron (le spin nombre quantique  $s=1/2$ ) et le moment cinétique intrinsèque du noyau (nombre quantique  $i$  dont la valeur entière ou demi-entière dépend de la composition du noyau). Un état quantique sera donc décrit par 7 nombres quantiques  $n, l, m_l, s, m_s, i, m_i$  avec une énergie  $E(n, l)$ .

## 4.3 Les corrections les plus importantes

### 4.3.1 Le couplage spin orbite ou la structure fine

Une charge avec un moment cinétique donne un moment magnétique  $\vec{M} = g_J \frac{q}{2m} \hbar \vec{S}$  ( $g_J \sim 2$  est le facteur de Landé). L'électron est dans un référentiel en mouvement par rapport au champ électrique statique donc d'après la relativité restreinte il subit l'action d'un champ magnétique  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E}$  avec  $\vec{E} = -\frac{1}{q} \vec{\nabla} V(r)$ .

On en déduit :  $\vec{B} = \frac{1}{qc^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \frac{m\vec{V} \times \vec{r}}{m}$

Comme  $m\vec{V} \times \vec{r}$  est le moment cinétique, il est égal à  $\hbar \vec{L}$ . L'énergie d'interaction correspondante s'écrit :

$$E = -\frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{B}^8$$

La correction d'énergie due au moment magnétique de l'électron est égale à :

$$\Delta E = -\frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

De même, à cause de la variation du potentiel en  $Ze^2$ , cette correction aura aussi une dépendance en  $(Z\alpha)^2$ . Avec ce couplage, c'est maintenant le moment cinétique total  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  qui est une constante du mouvement. Il est caractérisé par les nombres quantiques  $j, m_j$  tels que :

$$-j \leq m_j \leq j \text{ et } |l - s| \leq j \leq |l + s|$$

$j$  ne pouvant varier que par valeurs entières.

Un état quantique est maintenant caractérisé par les 7 nombres quantiques  $n, l, s, j, m_j, i, m_i$ .

<sup>8</sup> Le facteur  $1/2$  vient du fait que le mouvement de l'électron n'est pas rectiligne et uniforme (précession de Thomas)

### 4.3.2 Le couplage avec le spin nucléaire (structure hyperfine)

Au moment cinétique de spin  $\hbar \vec{I}$  est associé un moment magnétique  $\vec{M}_I = g_I \frac{q}{2m_p} \vec{I}$ .  $g_I$

est de l'ordre de quelques unités (5.585 pour un proton) et comme la masse  $m_p$  est 2000 fois plus élevée que l'électron, l'effet du magnétisme nucléaire est beaucoup plus faible que le magnétisme électronique. Ce couplage pourra donc être considéré comme une perturbation par rapport au couplage spin-orbite. Le moment magnétique nucléaire interagit avec le moment le moment cinétique  $J$  de l'électron.

Comme précédemment, à cause de ce couplage c'est le moment cinétique total qui est conservé  $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ . Un état quantique est maintenant caractérisé par les 7 nombres quantiques  $n, l, s, j, i, f, m_f$  que l'on pourra abrégé par  $f, m_f$ .

La structure fine et la structure hyperfine sont les principales corrections à appliquer et elles sont de l'ordre de  $(v/c)^2$ . Il existera donc des corrections aux ordres  $(v/c)^n$ . Il faut donc retenir que les écarts d'énergie sont donnés par une fonction de  $(Z\alpha)^2$  et des moments magnétiques. Si les constantes fondamentales  $\alpha, m_p, m_e, e, \dots$  sont stables alors les écarts d'énergie le seront aussi. Si elles ne le sont pas comme le montre des théories alternatives à la relativité générale (la théorie des cordes par exemple) alors les écarts d'énergie entre niveaux d'atomes différents ne seront plus dans un rapport constant. Pour tester cela, il suffira de comparer des transitions sur des atomes différents et vérifier la stabilité de cette comparaison. Le meilleur instrument pour faire cela est d'utiliser une horloge atomique.

## 5. Les transitions entre niveaux d'énergie

L'interaction entre un atome et un champ électromagnétique ne peut se faire que si les lois de conservation sont satisfaites :

1. Conservation de l'énergie (on néglige les effets relativistes) :  $h\nu = E_2 - E_1$  où  $\nu$  est la fréquence de l'onde et  $E_i$  un état d'énergie atomique.
2. Conservation du moment cinétique en prenant en compte le fait que le photon transporte un moment cinétique.
3. Conservation de l'impulsion puisque le photon transporte aussi une impulsion  $h\nu/c$ .

On peut la décomposer en 2 types d'interaction: électrique et magnétique.

- a. Dans le cas du champ électrique, les interactions sont nombreuses mais pour la plus intense, l'interaction dipolaire  $-d \cdot E$  ( $d$  dipole atomique et  $E$  champ électrique), les règles de sélection sont les suivantes :  $\Delta L = \pm 1, \Delta J = 0, \pm 1, \Delta F = 0, \pm 1, \Delta m_F = 0, \pm 1$ , les transitions entre  $J=0, F=0$  sont interdites (mais ces dernières pourraient être légèrement autorisées à cause d'autres termes dans le Hamiltonien atomique qui auront été négligés. En conséquence les états propres ne sont pas des vrais  $J=0$  ou  $F=0$ . Ce type de transition est d'ailleurs utilisé pour les horloges dans le domaine optique).
- b. De même pour le champ magnétique, l'interaction la plus intense est l'interaction dipolaire magnétique  $M \cdot B$  et Les règles de sélection sont :  $\Delta L = 0, \Delta J = 0, \pm 1, \Delta F = 0, \pm 1, \Delta m_F = 0, \pm 1$

Ces règles de sélection ne s'appliquent que pour les transitions dipolaires.

### 4.3.3 l'atome de césium (55 é)

