MASTER 1ère ANNEE - EXAMEN
Physique des satellites et du positionnement
Le système Galileo

13 avril 2015 - durée de l'épreuve : trois heures

L'usage des calculatrices est autorisé. Les documents distribués en cours sont autorisés, ainsi que vos notes manuscrites.
Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les mêmes que dans le cours. Les différentes parties du problème sont indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre voulu.
Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.
Les correcteurs estiment que la moitié du temps devrait être dédiée aux parties A et B, et l'autre moitié à la partie C.

Galileo est un projet européen de système de positionnement par satellites (radionavigation), destiné à supprimer la dépendance de l'Europe en matière spatiale, et notamment vis-à-vis du système américain, le GPS (Global Positioning System).
En test depuis fin 2005 à la suite des lancements des deux satellites Giove-A et Giove-B en décembre 2005 et avril 2008, les deux premiers satellites de la constellation ont été lancés le 21 octobre 2011. A l'heure actuelle, huit satellites sont en orbite. Au final, il est prévu de mettre 30 satellites en orbite.
Le principe de la mesure de positionnement est globalement identique à ce qui est pratiqué pour la constellation GPS et, sur les trois bandes de fréquence utilisées par Galileo, une est commune avec GPS.
Les satellites possèdent à leur bord quatre horloges atomiques : deux horloges à Rubidium et deux masers passifs.

Les données numériques du problème sont :

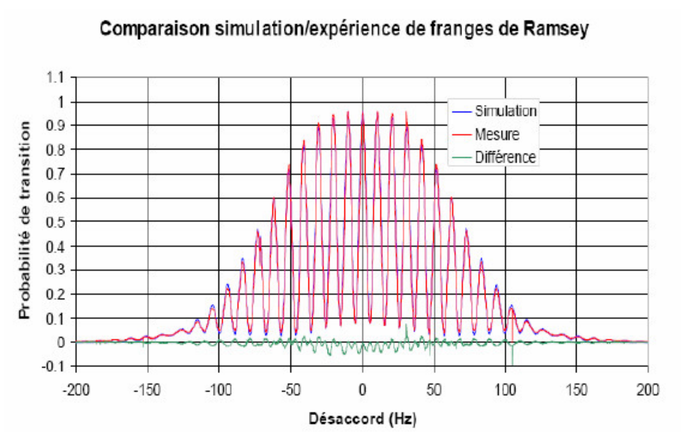
$$\begin{aligned}
R_T &= 6378 \text{ km} \\
Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\
c &= 299792458 \text{ m.s}^{-1} \\
\nu_{Cesium} &= 9192631770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Césium)} \\
\nu_{Rubidium} &= 6834682611 \text{ Hz (fréquence d'horloge du Rubidium)}
\end{aligned}$$

où R_T est le rayon terrestre, Gm est le paramètre gravitationnel standard de la Terre, et c est la vitesse de la lumière.

A - Choix de l'horloge et performances

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge atomique, que signifie en physique quantique le fait que l'oscillateur soit en résonance avec les atomes de référence ?
2. Décrire le principe des oscillations de Rabi. Quel paramètre physique détermine la largeur de la raie d'interaction ? Pourquoi est-ce difficile d'obtenir des mesures de grande précision avec une interaction unique ?
3. Un prototype d'horloge au sol a été élaboré pour préparer une mission spatiale. En sortie de cette horloge, on observe les franges ci-dessous.



   Quel processus physique permet d'obtenir de telles franges ? Pourquoi l'enveloppe des franges est-elle en forme de cloche ?

4. Déterminer le temps d'interrogation des atomes pour le prototype d'horloge étudié dans la question précédente. Comment ce temps d'interrogation peut-il être modifié si une horloge analogue adaptée est satellisée ?
5. Afin de choisir quel type d'horloge devrait voler pour Galileo, il a été utile de comparer les performances de deux fontaines existantes au sol : une ayant pour référence des atomes de Césium et une se servant d'atomes de Rubidium. Les exactitudes en fonction des phénomènes perturbatifs de ces deux horloges sont données dans le tableau ci-dessous.

	Fontaine au Césium		Fontaine au Rubidium	
Effet	Correction relative ($x10^{-16}$)	Incertitude relative ($x10^{-16}$)	Correction relative ($x10^{-16}$)	Incertitude relative ($x10^{-16}$)
Effet Zeeman quadratique	-1914	0,3	-3468	0,7
Radiation de corps noir	167,2	0,6	120,6	1,6
Collisions	246	2,5	8,4	1
Effet Doppler du premier ordre	0	3	0	2,5
Pureté spectrale	0	0,5	0	0,5
Autres	0	2	0	2

Déterminer les corrections totales relatives et absolues à appliquer sur les deux horloges ainsi que les incertitudes globales associées.

6. Quel est l'effet physique associé à la ligne du tableau intitulée "Doppler" ? Pourquoi a-t-on un déplacement nul et une incertitude non-nulle ?
7. Comparer les performances des deux horloges et discuter des avantages et des inconvénients des deux systèmes en justifiant vos arguments.

   Au final, il a été décidé, ainsi que cela est dit en inttroduction, que chaque satellite dispose à bord de deux horloges à Rubidium (Rubidium Atomic Frequency Standard ou RAFS) et deux masers passifs (Passive Hydrogen Maser ou PHM).

Figure 1. RAFS flight model.

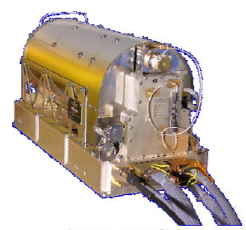
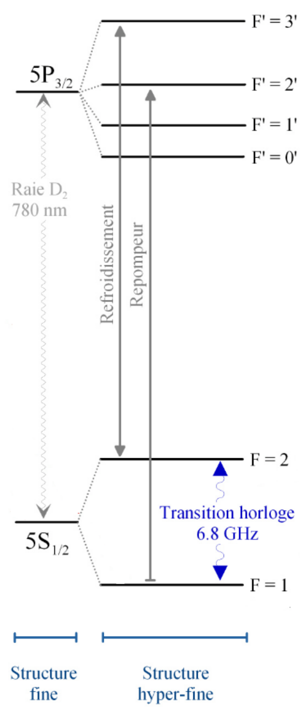
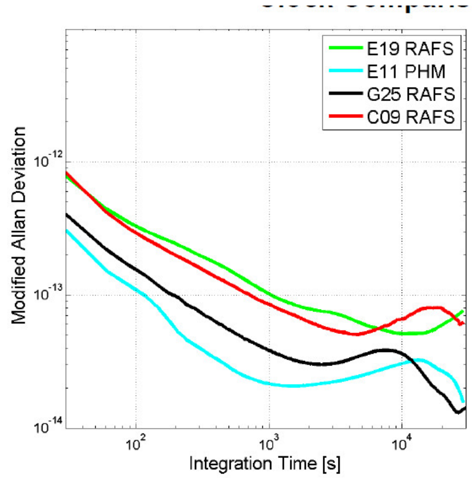


Figure 2. PHM flight model.

L'atome de rubidium a un électron de valence et sa structure atomique présente beaucoup de similarités avec celle du césium. Le diagramme ci-dessous montre quelques-uns des états de cet atome :



8. Donner les nombres quantiques des deux niveaux hyper-fins $5^2S_{1/2}, F = 2$ et $5^2P_{3/2}, F = 3$ ainsi que leurs degrés de dégénérescence. (Pour chacun de ces niveaux, il doit y avoir 6 nombres quantiques plus 1 correspondant à la dégénérescence).
9. Les performances des horloges RAFS et PHM en terme de stabilité ont été mesurées en situation dans les premiers satellites Giove mis en orbite à partir de 2005. La variance d'Allan des horloges a été estimée en fonction du temps de mesure, donnant les courbes ci-dessous.



Comparer les performances des différentes horloges RAFS et PHM étudiées.

B - Mesure de phase et combinaison de signaux

Suivant les positions des satellites Galileo, le signal de positionnement va traverser diverses parties de l'atmosphère terrestre.

Le principe de la mesure de phase Φ est de comparer la phase du signal reçue par le récepteur avec la phase du signal générée par le récepteur qui est une réplique du signal émis par le satellite Galileo. Le récepteur mesure à l'instant t_R la phase du signal émise par le satellite à l'instant t_E. On peut exprimer cette mesure en pseudo-distance en multipliant par la longueur d'onde λ :

$$L = c(t_R - t_E) = \lambda\frac{\Phi}{2\pi} = \ell_{géom} + \lambda N + \delta L_{iono} + \delta L_{tropo} + c(\delta t_R - \delta t_E) + \delta\ell_{relat} + \Delta_R + \Delta_E$$

où $\ell_{géom}$ est la distance géométrique entre le satellite et le récepteur que l'on cherche à déterminer, λN représente l'ambiguïté de mesure (N entier), δL_{iono} est la contribution de l'ionosphère sur la propagation du signal, δL_{tropo} est la contribution de la troposphère sur la propagation du signal, δt_R et δt_E sont les décalages des horloges du récepteur et du satellite GPS, $\delta\ell_{relat}$ décrit les effets relativistes sur le signal et Δ_R et Δ_E représentent les bruits du récepteur et de l'émetteur.

1. Rappeler en quoi consiste l'ambiguïté de mesure. (On pourra faire un schéma).
2. Parmi les différents termes de cette équation, quels sont ceux qui dépendent de la fréquence utilisée pour la mesure ? Justifier la réponse de façon rapide.
3. On effectue des mesures de la phase pour une fréquence de Galileo : $f_1 = 1575$ Hz qui donne la pseudo-distance L_1. Ces mesures sont effectuées simultanément avec le récepteur de l'opérateur et dans une station géographiquement proche (appartenant au réseau EGNOS) dont la position est connue avec une très bonne précision. Afin d'évaluer les contributions des différents termes de l'équation, l'opérateur soustrait le résultat de la station EGNOS à la valeur de pseudo-distance mesurée par le récepteur.

   Quels termes sont éliminés par ce calcul ? Quels sont les avantages d'une telle approche ? Comment améliorer encore cette mesure différentielle ?

Galileo propose différents services correspondant à des codes répartis sur plusieurs bandes de fréquence allant de 1164 à 1610 MHz.

4. Rappeler les conditions pour qu'un signal électromagnétique puisse traverser un plasma. (La démonstration détaillée n'est pas demandée, mais une justification rapide pourra être donnée)
5. A partir des caractéristiques de l'ionosphère (à partir des documents distribués), démontrer que les fréquences de Galileo peuvent se propager à travers l'ionosphère.

C - Le cas des satellites Galileo 5 et 6

Les satellites Galileo 5 et 6 ont été lancés en orbite avec un lanceur Soyouz (russe) depuis la base de lancement de Kourou le 22 août 2014. Suite à une défaillance technique du lanceur – panne de l'approvisionnement en carburant – les satellites sont arrivés sur la mauvaise orbite. Cette orbite très excentrique empêchait l'utilisation des satellites pour la navigation. Les paramètres de l'orbite initiale des deux satellites sont :

$$a = 26192 \text{ km} \tag{1}$$
$$e = 0.2330 \tag{2}$$

où a est le demi-grand axe et e l'excentricité.

1. Questions préliminaires :
   (a) Quelle sont les distances par rapport au centre de la Terre r_a et r_p respectivement de l'apogée et du périgée de l'orbite, en fonction de a et e ? Les calculer.
   (b) Donner l'expression de l'énergie réduite $\tilde{E}$ en fonction de a.
   (c) Donner l'expression de l'énergie réduite $\tilde{E}$ en fonction de r_a et v_a, respectivement la distance par rapport au centre de la Terre et la vitesse à l'apogée.
   (d) Déduire des questions précédentes l'expression de v_a, la vitesse à l'apogée, en fonction de Gm, a et e.
2. Circularisation de l'orbite : afin de pouvoir utiliser les deux satellites Galileo 5 et 6 pour la navigation, il fallait circulariser l'orbite, tout en augmentant l'altitude du périgée. Pour cela, un certain nombre de manœuvres ont été effectuée lorsque que le satellite était situé à l'apogée. Ces manœuvres reviennent à appliquer une poussée tangentielle (c'est-à-dire colinéaire au vecteur vitesse) à l'apogée. Cela transforme l'orbite elliptique en une orbite ayant la même distance de l'apogée, mais une excentricité et une distance du périgée différentes (voir figure 1).

   Les nouveaux paramètres sont alors :

   $$r'_a = r_a \tag{3}$$
   $$e' = 0.1561 \tag{4}$$

   où r'_a est la distance au centre de la Terre de l'apogée et e' l'excentricité de la nouvelle orbite.
   (a) On suppose que la poussée tangentielle à l'apogée modifie instantanément la vitesse du satellite à l'apogée en $v'_a = v_a + \Delta v_a$. Montrer que l'énergie réduite de la nouvelle orbite est :
   $$\tilde{E}' = \left(v_a + \frac{\Delta v_a}{2}\right) \Delta v_a - \frac{Gm}{2a} \tag{5}$$
   où a est le demi-grand axe de l'orbite initiale.
   (b) Exprimer a', le demi-grand axe de la nouvelle orbite, en fonction de a, e et e'.

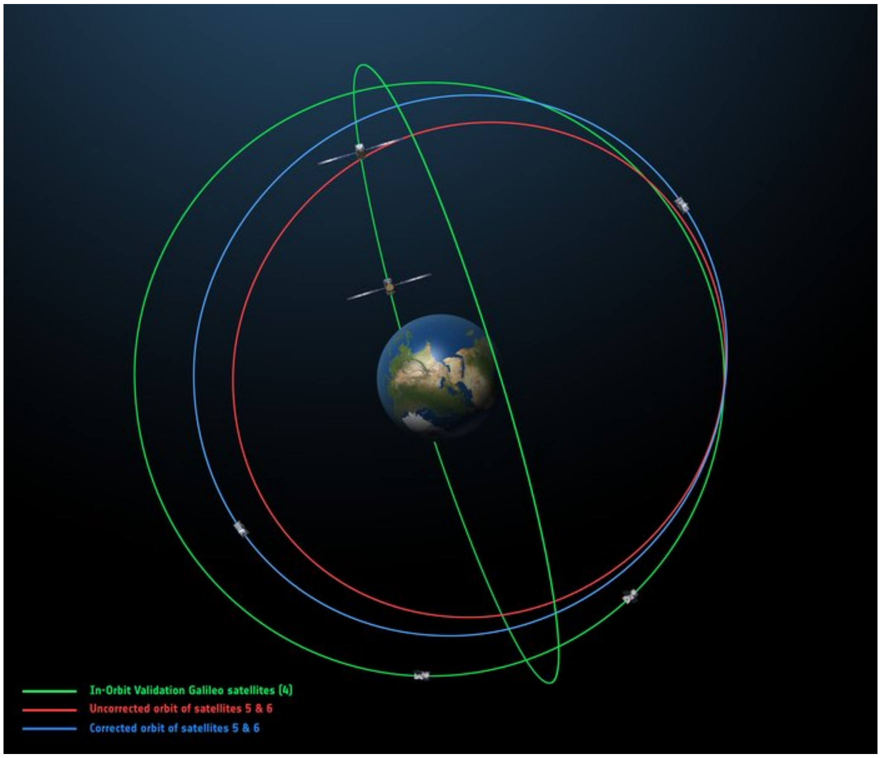


FIGURE 1 – En rouge : orbite initiale des satellites Galileo 5 et 6 ; en bleu : orbite corrigée. L'apogée est la même, mais l'orbite est moins excentrique et le périgée est plus élevé.

(c) En déduire l'expression de $\tilde{E}'$ en fonction de Gm, a, e et e'.

(d) On suppose que $\Delta v_a \ll v_a$. Trouver l'expression de Δv_a en fonction de Gm, a, e et e' (on utilisera les résultats des questions 1(d), 2(a) et 2(c)). Calculer la valeur de Δv_a ; l'hypothèse $\Delta v_a \ll v_a$ est-elle vérifiée ?

(e) De quelle quantité la distance du périgée a-t-elle été modifiée ?

3. Test du redshift : l'excentricité de l'orbite des satellites Galileo 5 et 6 permet d'envisager de faire un test du décalage en fréquence des horloges. On utilise la stabilité de l'horloge afin de déterminer la variation du redshift entre le périgée et l'apogée de l'orbite. On se place dans un référentiel GCRS dans lequel :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{6}$$

où on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés, et $i, j = \{1, 2, 3\}$.

(a) On appelle $y = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ la fréquence relative d'une horloge. En partant de la métrique (6), calculez y en faisant un développement limité à l'ordre $1/c^2$. On introduira la norme de la vitesse $v = \left(\delta_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}$.

(b) En utilisant les relations connues de l'orbite de Kepler, exprimer y en fonction de r, de a le demi-grand axe de l'orbite, de Gm et de c.

(c) En déduire l'expression de $\Delta y' = y'_a - y'_p$, où y'_a et y'_p sont les valeurs de la fréquence relative y de l'horloge du satellite respectivement à l'apogée et au périgée pour la nouvelle orbite. Calculer sa valeur numérique.

(d) On suppose que le bruit de mesure sur Δy pour une orbite du satellite est $\delta(\Delta y) \simeq 4.5 \times 10^{-14}$. Quel est la précision relative de la mesure ? On suppose que l'erreur aléatoire se moyenne en $N^{-1/2}$, où N est le nombre d'orbites. Combien d'orbites faut-il pour atteindre une précision relative de 0.7×10^{-4} sur le redshift, qui est la meilleure mesure obtenue à ce jour par le satellite Gravity Probe A (1976) ? Combien de temps doit alors durer l'expérience ? Pourquoi cette conclusion doit être nuancée (autres sources d'erreur ?).