

TD ionosphère troposphère

1. Vitesse de phase et vitesse de groupe

Soient deux ondes électromagnétiques planes progressives et monochromatiques, de même amplitude, émises par la même source (satellite) :

$$s_1(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad s_2(x, t) = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

- a-** Déterminer l'expression des battements représentant le signal total émis par la source.
- b-** Donner la pulsation de la porteuse qui est liée à la vitesse de phase du signal. Commenter. De même, donner la vitesse de l'enveloppe des battements et vérifier qu'elle correspond à la vitesse de groupe.

2. Propagation dans un plasma

On étudie la propagation dans un plasma d'une onde plane progressive transversale suivant \vec{u}_x .

Le champ électrique associé s'écrit :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

On suppose que les ions du plasma ne se déplacent pas et que l'équation du mouvement des électrons suit le modèle de Drude :

$$i\omega \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{E}$$

- a-** En déduire la loi d'Ohm entre la densité de courant et le champ électrique : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Vérifier que : $\sigma = \frac{N_e e^2}{im_e \omega}$ où N_e est le nombre d'électrons par unité de volume.

On montre alors que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} -ik \vec{u}_x \cdot \vec{E} = 0 \\ -ik \vec{u}_x \cdot \vec{B} = 0 \\ -ik \vec{u}_x \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ -ik \vec{u}_x \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 i\omega \vec{E} \end{cases}$$

- b-** Déterminer l'expression la relation de dispersion de l'onde dans le plasma.
- c-** k étant réel pour une onde qui se propage, en déduire que l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation limite ω_p : la pulsation de plasma, dont on donnera l'expression.
- d-** Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.
- e-** En déduire l'expression littérale et numérique, en fonction de la fréquence f , de l'indice de réfraction du milieu au premier ordre en f^2 .

3. Indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère

L'indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère peut être déterminé en supposant que l'atmosphère est un mélange homogène à la température de 0°C et à la pression de 101325 Pa. Dans le tableau ci-dessous, pour les fréquences radio, les indices de réfractons sont donnés pour chaque principaux gaz de l'atmosphère ; suivent ensuite les abondances en volume de ces gaz.

Gaz	Indice	Abondance (%)
Diazote	1,0002941	78,08
Dioxygène	1,0002664	20,95
Argon	1,000281	0,93
Dioxyde de carbone	1,000494	0,04

Déterminer l'indice moyen de la composante sèche de l'atmosphère. Comparer à la valeur recommandée pour les communications radio

$$n_r - 1 = 77,6 \times 10^{-8} \frac{P}{T}$$

où les différentes quantités sont exprimées dans des unités S.I.

TD ionosphère troposphère
Correction sommaire

1. Vitesse de phase et vitesse de groupe

a- $s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$
 $s(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{-\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{-k_1 + k_2}{2} x\right)$

b- La porteuse est la pulsation la plus grande : $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Il s'agit de la fréquence moyenne du signal. Elle est associée à une vitesse de propagation : $v_\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$ qui correspond bien à la vitesse de propagation moyenne du signal total.

Cette porteuse est modulée par une enveloppe à "basse" pulsation : $\frac{-\omega_1 + \omega_2}{2}$. La vitesse de propagation de cette modulation est : $v_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$. A la limite où les deux fréquences

sont proches on a : $\lim_{2 \rightarrow 1} \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$ ce qui est la définition de la vitesse de groupe. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de la modulation d'un signal dont la porteuse est à une grande fréquence.

2. Propagation dans un plasma

a- $\vec{j} = -N_e e \vec{v}_e = \frac{N_e e^2}{i\omega m_e} \vec{E}$

Donc : $\sigma = \frac{N_e e^2}{im_e \omega}$ où N_e est le nombre d'électrons par unité de volume.

b- $-ik \vec{u}_x \wedge \left(\frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E}\right) = \mu_0 \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 i\omega \vec{E}$

$i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \frac{N_e e^2}{i\omega m_e} \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 i\omega \vec{E}$

$k^2 = -\mu_0 \frac{N_e e^2}{m_e} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$

c- L'onde se propage si : $\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 > \mu_0 \frac{N_e e^2}{m_e}$

$\omega^2 > \frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e} = \omega_p^2$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 56,4 \sqrt{N_e}$ pulsation plasma (ou de Langmuir)

d- On a donc : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right)$

$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$ est la vitesse de phase (qui peut être supérieure à c)

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$ est la vitesse de groupe ou vitesse à laquelle se propage l'information contenue dans le signal.

e- L'indice de réfraction s'écrit : $n = \frac{c}{v}$

On a donc : $n_\varphi = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = 1 - \frac{N_e e^2}{2\omega^2} = 1 - 40,3 \frac{N_e}{f^2}$

car : $\frac{1.6^2 \times 10^{-38}}{9.1 \times 10^{-31} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 4 \times \pi^2} = 40.259$

De même : $n_g = \frac{c}{v_g} = 1 + 40,3 \frac{N_e}{f^2}$

3. Indice de réfraction de la composante sèche de l'atmosphère

On a pour un mélange de gaz : $n_{air\ sec} = \sum n_i a_i$

$n_{air\ sec} = 1.0002941 \times 0.7808 + 1.0002664 \times 0.2095 + 1.000281 \times 0.0093 + 1.000494 \times 0.0004 = 1.0002883$

Pour les communications radio on a

$n_r - 1 = 77.6 \times 10^{-8} \times \frac{101325}{(273.15)} = 2.8785722 \times 10^{-4}$

La différence entre les deux est de l'ordre de 10^{-6} ce qui en terme de positionnement représente 10 cm sur les 50 km de la troposphère. La différence n'est pas énorme pour des modèles aussi approximatifs.