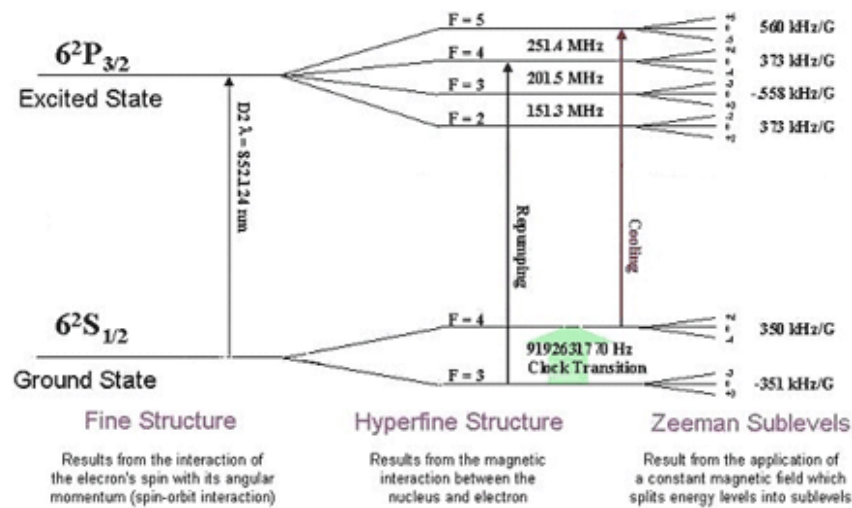


## TD horloge atomique

### 1. Structure hyperfine de la transition D2 du césium

Le diagramme ci-dessous montre les états  $6^2S_{1/2}$  et  $6^2P_{3/2}$  de l'atome de césium. La « raie D2 » du césium à  $\lambda \approx 852$  nm correspond aux transitions entre ces deux états.



- a- Donner les valeurs des nombres quantiques  $n, \ell, s, j, i, f$  ainsi que le degré de dégénérescence des niveaux hyperfins de ces états.
- b- Lister les transitions dipolaires électriques et dipolaires magnétiques possibles entre ces niveaux hyperfins.
- c- La durée de vie du niveau  $6^2P_{3/2}$  est  $\approx 30$  ns. Utiliser le principe d'incertitude de Heisenberg sous la forme  $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$  pour conclure que la largeur naturelle de la raie D2 est  $\approx 5$  MHz.

### 2. Oscillations de Rabi

a- On étudie la transition entre les états  $|F = 3, m_F = 0\rangle$  et  $|F = 4, m_F = 0\rangle$  du niveau  $6^2S_{1/2}$ , que l'on désigne par  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  respectivement. Cette transition est induite par un champ magnétique de direction constante et d'amplitude  $B \cos \omega t$ , avec  $B$  et  $\omega$  constantes. L'hamiltonien total peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
H_{tot} &= H_0 + H(t) \\
\text{avec } H_0|f\rangle &= \hbar\omega_f|f\rangle \\
H_0|e\rangle &= \hbar\omega_e|e\rangle \\
H(t)|f\rangle &= \hbar\Omega \cos \omega t|e\rangle \\
H(t)|e\rangle &= \hbar\Omega \cos \omega t|f\rangle
\end{aligned}$$

où  $\omega_f$ ,  $\omega_e$  et  $\Omega = -\frac{\mu_B}{2\hbar}gB$  sont des constantes.

On note l'état de l'atome au temps  $t$  par

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|f\rangle + b(t)|e\rangle$$

Ecrire l'équation d'évolution de  $|\psi(t)\rangle$ .

**b-** On pose le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}
a(t) &= \alpha(t)e^{-i\omega_f t} \\
b(t) &= \beta(t)e^{-i\omega_e t}
\end{aligned}$$

Ecrire les équations satisfaites par  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ . On pourra poser  $\omega_0 = \omega_e - \omega_f$  et  $\omega_d = \omega - \omega_0$ .

**c-** Si on impose la condition initiale :  $a(0) = 1$  et  $b(0) = 0$ , la solution de l'équation précédente donne :

$$b(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega' t}{2} e^{-i\omega_d t/2} e^{-i\omega_e t}$$

avec  $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \omega_d^2}$

Quelle est la probabilité de transition de l'atome vers l'état  $|e\rangle$  au temps  $t$ ?

**d-** A quoi correspond le phénomène de résonance pour ce système?

**e-** Décrire le principe et les conséquences d'une impulsion " $\pi$ " ainsi que celui d'une impulsion " $\pi/2$ ".

### 3. Franges de Ramsey

Pour réaliser des franges de Ramsey, l'atome de l'exercice précédent est soumis d'abord à une impulsion  $\pi/2$ .

Après un temps  $T$  d'évolution libre (sans interaction), il interagit à nouveau avec une impulsion  $\pi/2$ .

On suppose que, à l'instant  $t = 0$ , l'atome est dans l'état fondamental  $|f\rangle$ .

D'après les équations établies dans l'exercice précédent, on a pour une interaction de durée  $t$  :

$$\begin{aligned}
a(t) &= \left( \cos \frac{\Omega' t}{2} - i \frac{\omega_d}{\Omega'} \sin \frac{\Omega' t}{2} \right) e^{i\omega_d t/2} e^{-i\omega_f t} \\
b(t) &= -i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega' t}{2} e^{-i\omega_d t/2} e^{-i\omega_e t}
\end{aligned}$$

L'atome subit la première impulsion  $\pi/2$  dont on note la durée  $\tau$ .

**a-** Déterminer l'état  $|\psi_1\rangle = a_1|f\rangle + b_1|e\rangle$  de l'atome après cette première interaction. Après la première impulsion, l'atome évolue librement pendant un temps  $T$ .

**b-** Déterminer l'état  $|\psi_2\rangle = a_2|f\rangle + b_2|e\rangle$  de l'atome après l'évolution libre.

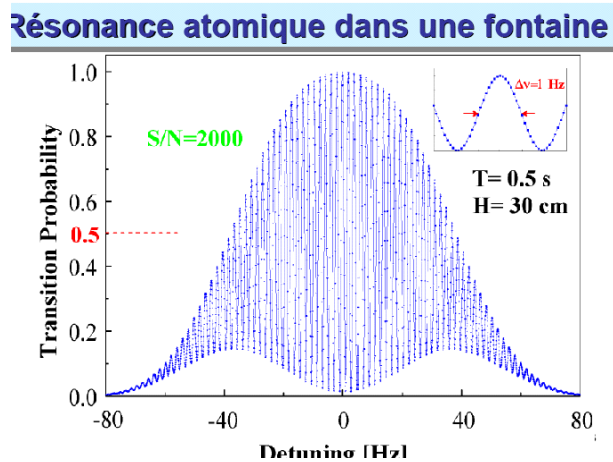
**c-** L'atome est alors soumis à une deuxième impulsion  $\pi/2$ , il est alors dans l'état :  $|\psi_3\rangle = a_3|f\rangle + b_3|e\rangle$

On démontre que :

$$b_3 = -\frac{i\Omega}{2\Omega'} \left[ \exp(-i\omega_e(\tau + T)) \exp(-i\omega_d\tau) \left(1 + i\frac{\omega_d}{\Omega'}\right) + \exp(-i\omega_f(\tau + T)) \exp(-i\omega(\tau + T)) \left(1 - i\frac{\omega_d}{\Omega'}\right) \right]$$

Déterminer la probabilité  $P(T)$  pour que l'atome soit dans l'état  $|e\rangle$  après l'ensemble de l'expérience de temps d'évolution libre  $T$ . Pourquoi parle-t-on de franges d'interférence dans cette expérience ?

**d-** La figure ci-dessous représente la mesure des franges de Ramsey dans une fontaine atomique. Il s'agit de la transition de probabilité en fonction de l'écart en fréquence  $\delta\nu = \frac{\delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_d}{2\pi}$ . Montrer que cette courbe est compatible avec les résultats précédemment obtenus.



#### 4. Stabilité et exactitude

**a-** Considérons une horloge ayant une stabilité de fréquence relative de  $\sigma(\tau) = 1,6 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$ , où  $\tau$  est la durée de mesure (en secondes). Quelle durée de mesure est nécessaire pour que le bruit de fréquence relative de l'horloge descende à  $10^{-16}$  ? Même question avec  $10^{-15}$  pour le bruit de fréquence relative ?

**b-** Considérons deux horloges, chacune de stabilité relative  $1,6 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$  et d'exactitude relative  $4 \times 10^{-16}$ . Dans une comparaison de fréquence entre elles, quelle durée de mesure est nécessaire pour que le bruit de fréquence (total) descende en-dessous de l'incertitude totale ?

## 5. Exactitude d'une fontaine au césium

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des effets systématiques dans une fontaine atomique à césium :

Exactitude des fontaines		
Effet	Correction [ $10^{-16}$ ]	Incertitude [ $10^{-16}$ ]
Effet Zeeman	-133	0.1
Rayonnement de corps noir	17.6	0.3
Impuretés du spectre micro-onde	0	0.2
Effet Doppler	0	0.5
Fuites micro-ondes	0	0.2
Pulling par les autres transitions	0	0.4
Effets relativistes	~0	0.1
Recul micro-onde	0	0.3
Collisions avec le gaz résiduel	0	0.1
<b>Collisions entre atomes froids + résonance de la cavité</b>	<b>1</b>	<b>0.5</b>

De combien faut-il corriger la valeur de fréquence de l'horloge ? Quelle est l'exactitude de l'horloge, absolue (en Hz) et relative ?

**TD horloge atomique**  
Correction sommaire

**1. Structure hyperfine de la transition D2 du césium**

Le diagramme ci-dessous montre les états  $6^2S_{1/2}$  et  $6^2P_{3/2}$  de l'atome de césium. La « raie D2 » du césium à  $\lambda \approx 852$  nm correspond aux transitions entre ces deux états.

**a-**  $n = 6 \quad 2s + 1 = 2 \implies s = 1/2$

Si S alors  $\ell = 0$       Si P alors  $\ell = 1$

$j = 1/2$                        $j = 3/2$

$|i - j| \leq f \leq i + j \quad i = 7/2$  dans les deux cas

Dégénérescence :  $d = 2f + 1$

$d = 7 + 9$                        $d = 11 + 9 + 7 + 5$

$d = 16$                            $d = 32$

**b-** Les transitions permises sont celles où  $\Delta m = -1, 0$  ou  $1$

Pour les transition dipolaire électrique les règles sont :

$\Delta m_f = 0, +1, -1$

$\Delta m_j = 0, +1, -1$

$\Delta m_\ell = +1, -1$

Pour les transition dipolaire magnétique :

$\Delta m_f = 0, +1, -1$

$\Delta m_j = 0, +1, -1$

$\Delta m_\ell = 0$

**c-**  $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$  or  $\Delta E = h\Delta\nu$

$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx \hbar/h \quad \Delta\nu \approx 1/(2\pi\Delta t) = 1/(2\pi * 30 * 10^{-9}) = 5.3052 \times 10^6$  Hz, soit 5 MHz

**2. Oscillations de Rabi**

**a-**  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H(t))|\psi(t)\rangle$

**b-**

$$\begin{cases} i \frac{da}{dt} = \omega_f a + \Omega \cos \omega t b \\ i \frac{db}{dt} = \omega_e b + \Omega \cos \omega t a \\ i \frac{d\alpha}{dt} = \Omega \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} \beta \\ i \frac{d\beta}{dt} = \Omega \cos \omega t e^{i\omega_0 t} \alpha \end{cases}$$

$$\mathbf{c-} P(t) = |b(t)|^2 = \left( \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega' t}{2} \right)^2$$

**d-** La résonance correspond au maximum de la probabilité précédente, c'est-à-dire, lorsque  $\omega = \omega_0$

**e-** L'impulsion  $\pi$  est une interaction avec le champ magnétique en résonance pendant le temps nécessaire à avoir  $P(t) = 1$ . Pour l'impulsion  $\pi/2$ , on a  $P(t) = 1/2$

### 3. Franges de Ramsey

$$\mathbf{a-} b_1 = -\frac{i\Omega}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(-i\omega_e \tau) e^{-i\omega_d \tau/2} \quad a_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\omega_d}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \exp\left(i \frac{\omega_d \tau}{2}\right) \exp(-i\omega_f \tau)$$

Après la première impulsion, l'atome évolue librement pendant un temps  $T$ .

$$\mathbf{b-} a_2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\omega_d}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \exp\left(i \frac{\omega_d T}{2}\right) \exp(-i\omega_f (\tau + T)) \quad b_2 = -\frac{i\Omega}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\omega_d T/2} \exp(-i\omega_e (\tau + T))$$

$$\mathbf{c-} b_3 = -\frac{i\Omega}{2\Omega'} \left[ \exp(-i\omega_e (\tau + T)) \exp(-i\omega_d \tau) \left(1 + i \frac{\omega_d}{\Omega'}\right) + \exp(-i\omega_f (\tau + T)) \exp(-i\omega (\tau + T)) \left(1 - i \frac{\omega_d}{\Omega'}\right) \right]$$

$$P(T) = \left( \frac{\Omega}{\Omega'} \right)^2 \left[ \cos\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) - \frac{\omega_d}{\Omega'} \sin\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \right]^2$$

Suivant la valeur de  $T$ , cette probabilité peut être maximale ou très faibles, il y a interférences.

**d-** La figure représente une configuration où  $T$  donne  $P$  maximale pour la résonance. La large à mi-hauteur de la frange centrale correspond à celle déterminée dans la question précédente (car alors  $\omega_d \ll \Omega'$ , le deuxième terme en sinus est négligeable.

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}$$

L'enveloppe globale des franges en forme de cloche correspond à la lorentzienne qu'on peut retrouver dans l'expression du coefficient  $b$  dans la question **c** : cette courbe est proportion-

$$\text{nelle à } \frac{\Omega^2}{\omega_d^2 + \Omega^2} = \frac{\Omega^2}{\Omega'^2}$$

### 4. Stabilité et exactitude

**a-** Pour que le bruit de l'horloge descende à  $10^{-16}$ , il faut que :

$$1.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2} = 10^{-16} \Leftrightarrow \tau = \left( \frac{1.6 \times 10^{-14}}{10^{-16}} \right)^2 = 25600 \text{ s} = 7.1 \text{ heures}$$

Pour  $10^{-15}$ , on a :

$$\tau' = \left( \frac{1.6 \times 10^{-14}}{10^{-15}} \right)^2 = 256 \text{ s} = 4.2667 \text{ min}$$

L'effet est quadratique ce qui explique le facteur 100 entre les deux résultats.

**b-** L'incertitude de la comparaison des deux horloges (en supposant que toutes les incertitudes sont indépendantes) est :

$$\Sigma = \sqrt{2 \times (1.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2})^2 + 2 \times (4 \times 10^{-16})^2}$$

On veut que la stabilité relative des deux horloges soit négligeable dans ce calcul. Pour cela, il faut que :

$$\left( \Sigma - \sqrt{2 \times (4 \times 10^{-16})^2} \right) < 10^{-16}$$

$$\Sigma < 10^{-16} + \sqrt{2 \times (4 \times 10^{-16})^2} = 6.657 \times 10^{-16}$$

$$2 \times (1.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2})^2 + 2 \times (4 \times 10^{-16})^2 < (6.657 \times 10^{-16})^2$$

$$\frac{1}{\tau} < \frac{(6.657 \times 10^{-16})^2 - 2 \times (4 \times 10^{-16})^2}{2 \times (1.6 \times 10^{-14})^2} = 2.4 \times 10^{-4}$$

$$\tau = 4.17 \times 10^3 \text{ s}$$

## 5. Exactitude d'une fontaine au césium

La correction est un biais systématique à retrancher. Elle s'additionne. Il faut ici corriger la fréquence de l'horloge en relatif de :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = (-133 + 17.6 + 1) \times 10^{-15} = -1.144 \times 10^{-13}$$

Soit une correction absolue de :

$$\Delta\nu = -1.144 \times 10^{-13} \times \nu_0 = -1.144 \times 10^{-13} \times 9192631770 = -1.051 \times 10^{-3} \text{ Hz}$$

L'exactitude est estimée par l'incertitude qui est une variance.

Les phénomènes décrits étant indépendants, les incertitudes du tableau s'additionnent quadratiquement, ce qui donne une incertitude relative :

$$\frac{\sigma_\nu}{\nu_0} = \sqrt{0.1^2 + 0.3^2 + 0.2^2 + 0.5^2 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.1^2 + 0.3^2 + 0.1^2 + 0.5^2} \times 10^{-15}$$

$$\frac{\sigma_\nu}{\nu_0} = 9.75 \times 10^{-16}$$

Soit une incertitude absolue de :

$$\sigma_\nu = 9.75 \times 10^{-16} \times \nu_0 = 9.75 \times 10^{-16} \times 9192631770 = 8.96 \times 10^{-6} \text{ Hz}$$