TD4 - Orbites

CORRIGÉ

A - Éléments orbitaux

Un satellite artificiel tourne autour de la Terre (considérée sphérique de rayon $R_\oplus$ et de masse $M_\oplus$) en 5h 6mn 47s. Son orbite a une excentricité de e = 0,1725 et une inclinaison de i = 29 ° 34'23". On suppose que son mouvement est képlerien.

1. Calculer le demi grand axe de l'orbite du satellite, sa hauteur au-dessus de la surface terrestre à son périgée et à son apogée.

Solution: D'après la troisième loi de Kepler on a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2}$$
$$\Rightarrow a = \left(\frac{GM_\oplus}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3}$$

soit $a \simeq 15066\,\mathrm{km}$.
La distance du satellite au centre de la Terre est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

Avec p le paramètre focal tel que

$$a = \frac{p}{1-e^2} \Rightarrow p = a(1-e^2)$$

et e représente l'excentricité de l'orbite et f son anomalie vraie. Pour avoir la distance à la surface de la Terre, il suffit de retrancher le rayon de la Terre à cette expression.
Au périgée, $f = 0$ d'où $R_p \simeq 6089\,\mathrm{km}$.
À l'apogée, $f = \pi$ d'où $R_p \simeq 11287\,\mathrm{km}$.

2. Calculer les vitesses maximale et minimale du satellite. Quelle vitesse supplémentaire minimale faudrait-il lui imprimer à son apogée pour qu'il quitte la Terre définitivement ?

Solution: D'après les équations du mouvement

$$v = \sqrt{GM_\oplus\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Au périgée, la vitesse est donc maximale et $v_{max} \simeq 6122\,\mathrm{m.s^{-1}}$.
À l'apogée, la vitesse est minimale et $v_{min} \simeq 4321\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Si on écrit l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G\mu m}{r}$$

avec $\mu = \frac{M_\oplus m_{sat}}{M_\oplus + m_{sat}}$ la masse réduite et $m = M_\oplus + m_{sat} \simeq M_\oplus$. En tenant compte de la conservation du moment cinétique on trouve

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{Gm}{r} = \frac{E}{\mu}$$

avec $h^2 = |\vec{r} \wedge \vec{v}|^2 = r^2(v^2 - \dot{r}^2)$ or, à l'apogée $\dot{r} = 0$ d'où $h_a^2 = r_a^2 v_a^2$. Le satellite quitte la Terre lorsque sa vitesse est telle que $E = 0$. On en déduit la vitesse de libération.

$$\frac{v_l^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_a} = 0$$

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_a}}$$

d'où $v_l \simeq 6717\,\mathrm{m.s^{-1}}$, il manque donc au minimu $v = v_l - v_a = 2396\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

3. Le noeud ascendant de l'orbite coincidant avec le périgée, quelle est la hauteur maximale du satellite au-dessus du plan de l'équateur céleste ? Qu'en déduisez vous sur la visibilité du satellite du pôle nord terrestre ? Du pôle sud terrestre ?

Solution: Le satellite passe au noeud ascendant au périgée. En faisant correspondre l'axe de référence (O,X) avec ce noeud on a $\Omega = 0$ et $\omega = 0$ où Ω est la longitude du noeud ascendant et ω l'argument du périgée. La hauteur du satellite au dessus de l'équateur est donc donné par

$$z = r \sin i \sin(\omega + f) = r \sin i \sin f$$

or, $r \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$, d'où $z = a(1-e^2)\frac{\sin f}{1+e\cos f}\sin i$. La hauteur maximale est ensuite donnée par la valeur de f qui annule la dérivée $\frac{dz}{df}$. Cette condition est réalisée lorsque $\cos f = -e$ et $\sin f = \sqrt{1-e^2}$. on en déduit la hauteur maximale :

$$z_{max} \simeq 7218\,\mathrm{km}.$$

Comme $z_{max} > R_\oplus$, le satellite sera visible du pôle nord. Par symétrie ce sera aussi le cas au pôle sud.

B - Orbite de transfert de Hohmann

On considère un satellite artificiel dont la trajectoire est circulaire de rayon $r_1 = a$. On veut transférer ce satellite sur une autre orbite circulaire, dans le même plan, de rayon $r_2 = a + \Delta a$. Le transfert de Hohmann est une trajectoire permettant de passer de la première orbite circulaire à la deuxième en utilisant uniquement deux manœuvres impulsionnelles, et consommant le moins d'énergie possible. On applique d'abord un changement de vitesse Δv_1 tangentiellement à la trajectoire circulaire pour changer l'orbite en une ellipse de périgée r_1 et d'apogée r_2. À l'apogée, on applique un changement de vitesse Δv_2, toujours tangentiellement à l'orbite, pour « circulariser » l'orbite à un rayon r_2.

1. Calculer le changement de vitesse total $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$ nécessaire pour transférer le satellite de la première orbite circulaire à la deuxième.

Solution: Les vitesse orbitale des deux orbites circulaires sont données par

$$\begin{cases} v_1 &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_2}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a+\Delta a}} \end{cases}$$

L'ellipse de transfert a un demi grand axe qui vaut

$$a_t = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = a + \frac{\Delta a}{2}.$$

La vitesse du satellite au périgée est

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_t}\right)} \\ &= \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_t}\frac{r_2}{r_1}} \end{aligned}$$

et celle à l'apogée est

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_t}\right)} \\ &= \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_t}\frac{r_1}{r_2}}. \end{aligned}$$

Pour faire passer le satellite de l'orbite circulaire 1 vers l'orbite elliptique, il faut changer sa vitesse de

$$\Delta v_1 = v_p - v_1$$

Pour circulariser l'orbite, il faut ensuite changer la vitesse de

$$\Delta v_1 = v_2 - v_a$$

2. Faire un développement limité du résultat en supposant $\Delta a \ll a$ et démontrer que, au premier ordre, le changement de vitesse total est égal à la différence des vitesses orbitales.

Solution: On a

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a + \frac{\Delta a}{2}}\frac{a + \Delta a}{a}} - \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a}} + \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a + \Delta a}} - \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a + \frac{\Delta a}{2}}\frac{a}{a + \Delta a}}.$$

Lorsque $\Delta a << a$ on trouve alors $\Delta v \to v_2 - v_1$

3. Vérifier la justesse de l'approximation dans le cas d'une manœuvre consistant à modifier l'altitude d'un satellite de 750 à 775 km.

Solution: Avec $r_1 = 750\,\text{km}$ et $r_1 = 775\,\text{km}$ on trouve $v_1 - v_2 \simeq 13\,\text{m.s}^{-1}$.
Avec l'expression totale, on trouve le même résultat.

Annexe - Valeurs numériques utiles

- Rayon terrestre : $R_\oplus \simeq 6378$ km
- Masse de la Terre : $GM_\oplus \simeq 3.985.10^{14}$ m^3.s^{-2}