TD3 - Métrique et projection

CORRIGÉ

A - Projection sphérique

Dans cet exercice, on se propose d'étudier les changements de coordonnées et les projections pour une métrique sphérique.

1. Considérons un point de coordonnées $x^i = (x, y, z)$. Exprimer ces coordonnées en fonction des coordonnées sphériques $x^{i'} = (\rho, \theta, \varphi)$.

Solution:

$$\begin{cases} x &= \rho \cos\varphi \sin\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\theta \end{cases}$$

2. Pour un espace euclidien, l'intervalle s'écrit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

D'un autre coté, le changement de coordonnées s'écrit (en utilisant la notation d'Einstein)

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl} \\ &= x^k_{i'} x^l_{j'} g_{kl} \end{aligned} \tag{2}$$

Écrire le tenseur métrique $g'_{i'j'}$ représentant les coordonnées sphériques. En déduire l'expression de l'intervalle.

Solution: Le tenseur métrique de l'espace euclidien est diagonal et s'écrit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g' est donc symétrique. De plus, les termes non diagonaux s'annulent. On obtient donc

$$\begin{cases} g'_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \\ g'_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\ g'_{33} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \end{cases}$$

On en déduit

$$g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \\ &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\Omega^2 \end{aligned}$$

3. La métrique de la surface définie par $\rho = 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Sigma^2 &= \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \\ &= g_{ab}^{(\Sigma)} \mathrm{d}x^{a'} \mathrm{d}x^{b'} \end{aligned} \tag{3}$$

La métrique du plan quant à elle s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ &= g_{cd}^{(\sigma)} \mathrm{d}x^c \mathrm{d}x^d \\ &= \delta_{cd} \mathrm{d}x^c \mathrm{d}x^d \end{aligned} \tag{4}$$

On appelle projection l'application $\mathcal{P}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}: & (\theta, \varphi) \to (x, y) \\ x = & f(\theta, \varphi) \\ y = & g(\theta, \varphi) \end{array} \right. \tag{5}$$

En déduire la métrique $\mathcal{G}^{(\sigma)}$ paramétrée en (θ, φ).

Solution:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathcal{G}_{a'b'}^{(\sigma)} \mathrm{d}x^{a'} \mathrm{d}x^{b'}$$

avec (d'après la question2)

$$\mathcal{G}_{a'b'}^{(\sigma)} = x_{a'}^c x_{b'}^d \delta_{cd}$$

d'où

$$\mathcal{G}^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi} & \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que

$$\mathrm{d}\sigma^2 = (\mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\varphi) J^T J \begin{pmatrix} \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} \tag{6}$$

où J est la matrice jacobienne de la transformation.

Solution:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

En faisant le produit matriciel on retrouve l'expression de la question précédente.

5. Soit la projection dite "équivalente" :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = \varphi \\ y & = \cos\theta \end{array} \right. \tag{7}$$

On définit le rapport α entre la surface telle que projetée sur la carte plane et la surface initiale sur la sphère

$$\alpha = \left| \frac{\det J}{\sin\theta} \right| \tag{8}$$

Si les deux surfaces sont égales, alors $\alpha = 1$. Montrer que c'est le cas pour une surface projetée à l'aide de la projection équivalente (7).

Solution:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\det J = \sin\theta$ et $\alpha = 1$.

6. Considérons maintenant la projection dite "conforme"

$$\begin{cases} x &= \ln\left[\frac{1}{\tan(\theta/2)}\right] \\ y &= \varphi \end{cases} \tag{9}$$

En considérant l'expression du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= g_{ab}u^a v^b \\ &= ||u||.||v|| \cos(\widehat{u,v}), \end{aligned} \tag{10}$$

montrer que la projection conforme (9) conserve les angles.

Solution: Considérons le produit scalaire sur la sphère :

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= g'_{ab}u^a v^b \\ &= (u\ v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= u^1v^1 + \sin^2(\theta/2)u^2v^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\cos^{(\sigma)}(\widehat{u,v}) = \frac{u^1v^1 + \sin^2(\theta/2)u^2v^2}{\sqrt{\left(u^1u^1 + \sin^2(\theta/2)u^2u^2\right)\left(v^1v^1 + \sin^2(\theta/2)v^2v^2\right)}}$$

Considérons maintenant le produit scalaire sur les vecteurs projetés grâce à la projection (9)

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= (u\ v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{u^1v^1 + \sin^2(\theta/2)u^2v^2}{\sin^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos^{(\Sigma)}(\widehat{u,v}) &= \frac{u^1v^1 + \sin^2(\theta/2)u^2v^2}{\sqrt{\left(u^1u^1 + \sin^2(\theta/2)u^2u^2\right)\left(v^1v^1 + \sin^2(\theta/2)v^2v^2\right)}} \\ &= \cos^{(\sigma)}(\widehat{u,v}) \end{aligned}$$