TD2 - Simultanéité, temps propre et temps coordonnée

CORRIGÉ

A - Espace-temps newtonien vs. espace-temps minkowskien

Soient deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ le long de l'axe (Ox) avec une vitesse constante v. Les axes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident à $t = t' = 0$.

1. Soit S une horloge fixe dans $\mathcal{R}$. On mesure à l'aide de cette horloge le temps aller-retour d'un signal émis depuis l'origine dans la direction (Oy), et réfléchi en $y = l$. On note ce temps Δt. Une autre horloge, fixe dans $\mathcal{R}'$, mesure l'intervalle de temps $\Delta t'$ entre ces deux événements : émission et réception du signal. Trouver la relation entre Δt et $\Delta t'$.
2. On peut montrer que les coordonnées (primées) d'un événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont reliées à ses coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}$ par une *transformation linéaire* (hypothèse d'homogénéité de l'espace-temps) :

$$\begin{aligned} t' &= At + Bx \\ x' &= Dt + Ex \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

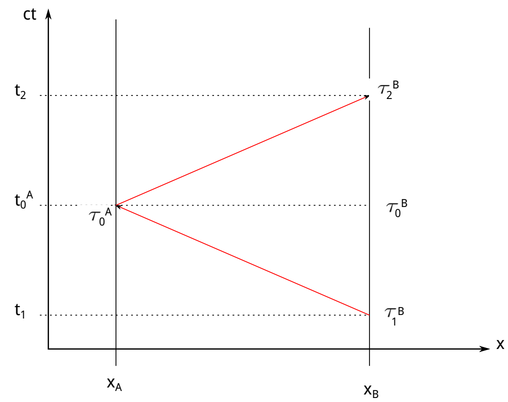
   Grâce à un raisonnement sur le déplacement relatif des deux référentiels, montrer que l'on peut réduire le nombre de paramètres libres de la transformation (1) à deux en introduisant la vitesse v.
3. Géométrie newtonienne de l'espace et du temps :
   (a) Quelle hypothèse fait-on sur le temps dans l'espace-temps de Newton ? Cette hypothèse est-elle compatible avec l'expérience de la question 1 ?
   (b) En déduire la forme finale de la transformation (1).
   (c) En considérant deux événements simultanés A et B de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans $\mathcal{R}$, montrer que la quantité $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ est invariante par la transformation trouvée précédemment. Que représente Δr^2 en géométrie euclidienne ?
4. Géométrie de l'espace-temps de la relativité restreinte :
   (a) Quelle hypothèse fait-on sur la vitesse de la lumière dans l'espace-temps de Minkowski ? Cette hypothèse est-elle compatible avec l'expérience de la question 1 ?
   (b) Soient deux événements A et B de coordonnées (t_A, x_A, y_A, z_A) et (t_B, x_B, y_B, z_B) dans $\mathcal{R}$. En admettant que la quantité $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$ est invariante par la transformation (1), déterminer sa forme définitive.

B - Conventions de simultanéité

On veut démontrer que les conventions de simultanéité d'Einstein et celle par transport lent d'horloge sont équivalentes en relativité restreinte. On considère deux horloges A et B immobiles dans le système de coordonnées (ct, x), et une troisième horloge mobile M.

1. Soit un évenement A_0 repéré par le temps propre τ_0^A le long de la ligne d'univers de l'horloge A. Représenter sur un diagramme d'espace-temps (ct, x) les évenements simultanés à τ_0^A le long de la ligne d'univers de l'horloge B, que l'on appelle B_0 et $\tilde{B}_0$ suivant que l'on utilise respectivement la convention de simultanéité d'Einstein ou bien la convention par transport lent de l'horloge M.

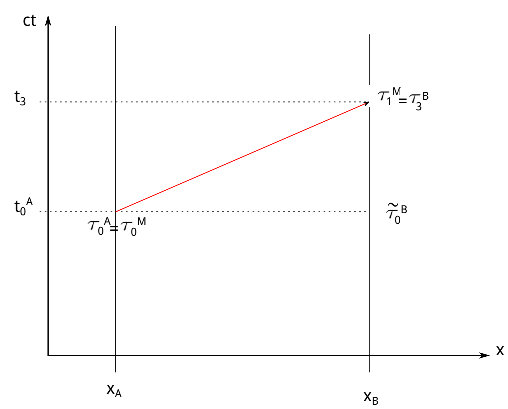
Solution:



Sur la figure ci-dessus est schématisée la convention de simultanéité d'Einstein. D'après cette convention, l'évènement B_0 est simultané à l'événement A_0 si

$$\tau_0^B = \frac{\tau_2^B + \tau_1^B}{2} = \tau_0^A$$

Dans le cas de la convention de transport lent de l'horloge M est représentée sur la figure ci-dessous.



Dans cette convention, l'évènement $\tilde{B}_0$ est simultané à A_0 si

$$\tilde{\tau}_0^B = \lim_{v_M \to 0} [\tau_3^B - (\tau_1^M - \tau_0^M)]$$

2. Écrire la relation temps propre / temps coordonnée pour les trois horloges A, B et M dans le cas où $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ (relativité restreinte).

Solution: En espace temps plat : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, on peut donc écrire l'intervalle comme

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

avec

$$\begin{cases} \eta_{00} &= -1 \\ \eta_{\alpha,0} &= \eta_{0,\alpha} = 0 \\ \eta_{ij} &= \delta_{ij} \end{cases}$$

avec i, j les indices des coordonnées spatiales.
Les horloges A et B sont immobiles on a donc

$$d\tau_{A,B} = dt_{A,B}$$

Pour ce qui est de l'horloge M on obtient

$$d\tau_M = dt_M \sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}}$$

3. Dans le cas de la convention de simultanéité d'Einstein, on apelle B_1 et B_2 les évenements le long de la ligne d'univers de l'horloge B, correspondant respectivement au départ et à l'arrivée du signal de synchronisation. Calculer les temps coordonnée t_1 et t_2 de B_1 et B_2, en fonction de t_0^A le temps coordonnée de A_0 et des trajectoires des deux horloges A et B.

Solution:

$$\begin{cases} t_1 &= t_0^A - c||\vec{x}_B - \vec{x}_A|| \\ t_2 &= t_0^A + c||\vec{x}_B - \vec{x}_A|| \end{cases}$$

4. En utilisant les définitions des deux conventions de simultanéité, montrer que les évenements B_0 et $\tilde{B}_0$ sont les mêmes.

Solution: Grâce à la convention d'Einstein, on a

$$\tau_0^B = \frac{\tau_1^B + \tau_2^B}{2}$$

et comme B est immobile

$$t_0^A = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

D'après la question 3,

$$t_1 + t_2 = 2t_0^A \Rightarrow t_0^A = \frac{t_1 + t_2}{2} = t_0^B = \tau_0^B$$

Avec la convention de transport lent d'horloge on a

$$\tilde{\tau}_0^B = \lim_{v_M \to 0} [\tau_3^B - (\tau_1^M - \tau_0^M)].$$

Comme B est immobile : $t_3^B = \tau_3^B$
De plus, d'après la question 2, on a

$$\int_{\tau_0^M}^{\tau_1^M} d\tau^M = \int_{t_0^A}^{t_0^B} \sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}} dt^M \to_{v_M \to 0} t_3^B - t_0^A$$
$$\Rightarrow (\tau_1^M - \tau_0^M) \to_{v_M \to 0} t_3^B - t_0^A$$
$$\Rightarrow \tilde{\tau}_0^B = t_0^A = \tau_0^B$$

C - Synchronisation par transport d'horloge et effet Sagnac

Entre les années 50 (premières horloges atomiques) et les années 80 (début du système GPS), un des moyens les plus courants de transfert de temps était le transport d'horloges. Une horloge mobile M est synchronisée localement avec une horloge A et part de A au temps coordonnée T_0 pour arriver à une horloge B au temps coordonnée T_1. En arrivant elle est synchronisée localement avec l'horloge B.

On dispose de trois quantités propres mesurées : les deux résultats des comparaisons locales, $\Delta\tau^A = \tau^A(T_0) - \tau^M(T_0)$, $\Delta\tau^B = \tau^B(T_1) - \tau^M(T_1)$, et l'intervalle de temps propre mesuré sur M : $\Delta\tau^M = \tau^M(T_1) - \tau^M(T_0)$. On cherche à déterminer l'écart $\tau^B(T_0) - \tau^A(T_0)$, qui est la désynchronisation des deux horloges A et B à la date T_0, en utilisant la convention de simultanéité coordonnée.

1. On se place dans un cadre newtonien. Quelle est la relation entre temps propre et temps coordonnée ? Montrer que la désynchronisation entre A et B ne fait pas intervenir le temps de transport de M :

$$\tau^B(T_0) - \tau^A(T_0) = \Delta\tau^B - \Delta\tau^A \tag{2}$$

Solution: On se place dans le cadre Newtonien : $d\tau = dt$
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\tau^B(T_0) - \tau^A(T_0) &= \tau^B(T_0) - \tau^B(T_1) + \tau^B(T_1) - \tau^M(T_1) + \tau^M(T_1) - \tau^M(T_0) + \tau^M(T_0) - \tau^A(T_0)\\ &= \tau^B(T_0) - \tau^B(T_1) + \Delta\tau^B + \Delta\tau^M - \Delta\tau^A\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\tau^B(T_0) - \tau^B(T_1) &= \tau^B(T_0) - \tau^M(T_0) + \tau^M(T_0) - \tau^M(T_1) + \tau^M(T_1) - \tau^B(T_1)\\ &= \Delta\tau^B - \Delta\tau^M - \Delta\tau^B\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\tau^B(T_0) - \tau^A(T_0) &= -\Delta\tau^M + \Delta\tau^B + \Delta\tau^M - \Delta\tau^A\\ &= \Delta\tau^B - \Delta\tau^A\end{aligned}$$

2. On se place dans le cadre de la relativité générale. Dans le système de référence GCRS la métrique s'exprime :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}T^2 + \left(1 + \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)\delta_{ij}\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^j \tag{3}$$

Quelle est la relation entre temps propre et temps coordonnée ?

Solution:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\left(1 - \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}T^2 + \left(1 + \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)\delta_{ij}\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^j\\ &= -c^2\mathrm{d}\tau^2\end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{1 - \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}T^2}\left(1 + \frac{2W(T,\boldsymbol{X})}{c^2}\right)} \simeq 1 - \frac{W(T,\boldsymbol{X})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4})$$

D'où :

$$d\tau = 1 - \frac{W(T,\boldsymbol{X})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4})$$

3. Montrer que la désynchronisation entre A et B s'écrit :

$$\tau^B(t_0) - \tau^A(t_0) = \Delta\tau^B - \Delta\tau^A + \Delta\tau^M - [T_{01}]^B \tag{4}$$

où $T_{01} = T_1 - T_0$ et $[]^B$ est la transformation temps coordonnée vers temps propre de B.

Solution: De la même façon que dans la question 1, on a

$$\begin{aligned}
\tau^B(T_0) - \tau^A(T_0) &= -\Delta\tau^A + \Delta\tau^M + \Delta\tau^B + \int_{\tau^B(T_1)}^{\tau^B(T_0)} \mathrm{d}\tau \\
&= -\Delta\tau^A + \Delta\tau^M + \Delta\tau^B - \int_{\tau^B(T_0)}^{\tau^B(T_1)} \mathrm{d}\tau \\
&= -\Delta\tau^A + \Delta\tau^M + \Delta\tau^B - \int_{T_0}^{T_1} \left(1 - \frac{W(T,\boldsymbol{X})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right) \mathrm{d}T \\
&= -\Delta\tau^A + \Delta\tau^M + \Delta\tau^B - [T_{01}]^B
\end{aligned}$$

4. Calculer $\Delta\tau^M$ en fonction de T_{01} et des corrections relativistes en $1/c^2$ dans les deux cas où l'horloge M fait un tour de la Terre dans les directions Est et Ouest. On supposera que son mouvement s'effectue dans le plan équatorial à une distance coordonnée R_0 constante du centre de la Terre, et à une vitesse coordonnée u constante par rapport à la surface de la terre (dans des coordonnées spatiales en rotation obtenues de GCRS par une rotation rigide), pour $W(T,\boldsymbol{X}) = GM/R$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\Delta\tau^M = \tau_1^M - \tau_0^M &= \int_{T_0}^{T_1} \left(1 - \frac{W(T,\boldsymbol{X})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right) \mathrm{d}T \\
&= \left(1 - \frac{W}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right) T_{01}
\end{aligned}$$

Soit Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Si l'horloge fait un tour de la Terre vers l'est on a : $v_E = u + \Omega R_0$

Si l'horloge fait un tour de la Terre vers l'ouest on a : $v_O = u - \Omega R_0$.

On en déduit

$$\begin{cases} \Delta\tau_E^M &= \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} - \frac{(u+\Omega R_0)^2}{2c^2}\right) T_{01} \\ \Delta\tau_O^M &= \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} - \frac{(u-\Omega R_0)^2}{2c^2}\right) T_{01} \end{cases}$$

5. Montrer que les deux valeurs trouvées diffèrent par $4\Omega\mathcal{A}/c^2$ (le terme $2\Omega\mathcal{A}/c^2$ est souvent appelé l'effet Sagnac), où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la terre et $\mathcal{A}$ est la surface du cercle tracé par la trajectoire.

Solution:

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_O^M - \Delta\tau_E^M &= T_{01}\left(1 - \frac{GM}{Rc^2} - \frac{(u-\Omega R_0)^2}{2c^2} - 1 + \frac{GM}{Rc^2} + \frac{(u+\Omega R_0)^2}{2c^2}\right) \\
&= 4\Omega R_0 u \frac{T_{01}}{2c^2}
\end{aligned}$$

Or

$$T_{01} = \frac{2\pi R_0}{u}$$
$$\Rightarrow \Delta\tau_O^M - \Delta\tau_E^M = \frac{4\Omega\mathcal{A}}{c^2}$$

avec $\mathcal{A} = \pi R_0^2$

6. Montrer en utilisant (4) que la synchronisation de A ≪ avec elle-même ≫, en utilisant une horloge mobile qui revient sur A, donne $\tau^A(t_0) - \tau^A(t_0) = 0$ pour n'importe quelle trajectoire de l'horloge mobile. Cela s'appelle une ≪ règle de fermeture ≫ et constitue un moyen pour vérifier le bon fonctionnement du transfert de temps.

Solution:

$$\begin{aligned}
\tau^A(T_0) - \tau^A(T_0) &= \Delta\tilde{\tau}^A - \Delta\tau^A + \Delta\tau^M - [T_{01}]^A \\
&= \tau^A(T_1) - \tau^M(T_1) - \tau^A(T_0) + \tau^M(T_0) + \tau^M(T_1) - \tau^M(T_0) - [T_{01}]^A \\
&= \tau^A(T-1) - \tau^A(T_0) - [T_{01}]^A \\
&= [T_{01}]^A - [T_{01}]^A = 0
\end{aligned}$$

Annexe - Valeurs numériques utiles

— Vitesse de la lumière dans le vide : $c \simeq 2.998.10^8$ m.s^{-1}
— Rayon terrestre : $R_\oplus \simeq 6378$ km
— Masse de la Terre : $GM_\oplus \simeq 3.985.10^{14}$ m^3.s^{-2}
— Vitesse angulaire de la Terre : $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5}$rad.s^{-1}
— Altitude GPS : $h_{GPS} = 20200$ km
— Altitude GALILEO : $h_{GAL} = 23200$ km