TD1 - Une brève histoire de la navigation

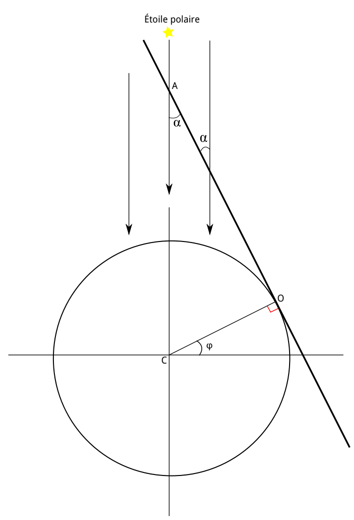
CORRIGÉ

A - Les premiers instruments : détermination de la latitude

Les premiers instruments de navigation tels que le Kamal et le sextant servaient à mesurer des angles.

1. Montrer que l'angle entre l'horizon et l'étoile Polaire correspond à la latitude du lieu d'observation.

Solution:

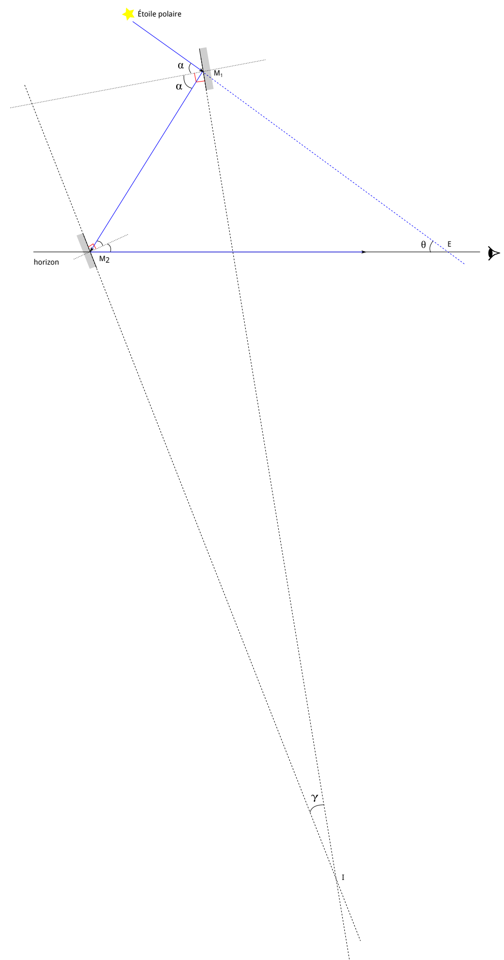


L'étoile polaire est située très loin de la Terre, les rayons nous en parviennent donc parallèlement. Soit α l'angle entre l'étoile polaire et l'horizon (mesuré) et φ la lattitude. En se plaçant dans le triangle COA on obtient

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi$$
$$\Rightarrow \varphi = \alpha$$

2. Expliquer le principe du sextant.

Solution:



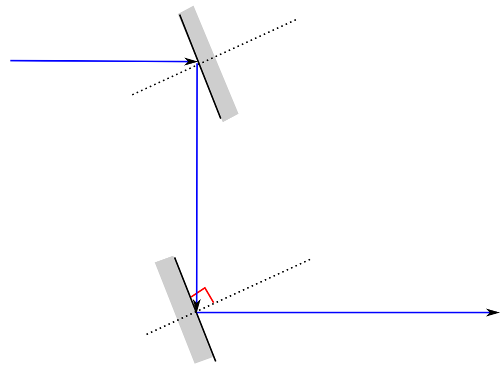
On mesure l'angle γ entre les deux miroirs lorsque ceux-ci sont disposés de telle sorte que l'image de l'étoile polaire est superposée à l'horizon. On cherche donc la relation entre cet angle et l'angle entre l'étoile et l'horizon pour avoir accès à la latitude du lieu. Plaçons-nous dans le triangle M_1M_2I :

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha &= \pi \\ \Rightarrow \gamma &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

De même, si on se place dans le triangle M_1M_2E, on a

$$\begin{aligned} \pi - 2\alpha + 2\beta + \theta &= \pi \\ \Rightarrow \theta &= 2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

On en déduit : $\theta = 2\gamma$ Remarque : Si les deux miroirs sont parallèles, $\theta = 0$ on voit dans la même direction $\Rightarrow$ Principe du périscope.

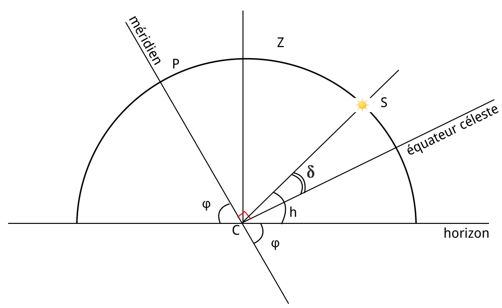


3. Quel est le problème dans l'hémisphère sud ?

Solution: Dans l'hemisphère sud, on ne voit pas l'étoile polaire. Il faut donc trouver d'autres moyens pour déterminer la latitude.

4. Expliquer une méthode de détermination de la latitude qui utilise l'observation du Soleil.

Solution:



On mesure la hauteur du soleil par rapport à l'horizon. Grâce à la date, et en se référant aux tables donnant la déclinaison δ et

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta - h$$

5. Quel est le principal inconvénient de ces méthodes ?

Solution: Il doit faire suffisament beau pour pouvoir observer le ciel.

B - Quelques ordres de grandeur

Le système GPS est constitué de satellites orbitant à environ 20 200 km d'altitude. Les satellites du système GALILEO orbitent quant à eux à environ 23 200 km. Chaque satellite envoie une onde électromagnétique vers un récepteur au sol qui mesure temps de propagation du signal entre le satellite et le sol.

1. Pour chaque système, calculer un ordre de grandeur du temps de parcours du signal électromagnétique envoyé vers le récepteur au sol.

Solution:

$$t = \frac{d}{c}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} t_{gps} & \simeq 67\,\mathrm{ms} \\ t_{gal} & \simeq 77\,\mathrm{ms} \end{array} \right.$$

2. On veut une précision de l'ordre du mètre sur le GPS au sol. Quelle précision sur la mesure du temps de parcours doit être capable de fournir l'horloge ?

Solution:

$$d = ct$$
$$\Delta d = c\Delta t$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta d}{c} \simeq 3\,ps$$

3. Chaque satellite envoie un train d'onde vers le récepteur. Combien de satellites sont alors nécessaires à la localisation sur le globe terrrestre ?

Solution: Pour pouvoir se positionner sur la sphère terrestre, on a besoin de recevoir simultanément le signal de 3 satellites. Mais il faut en plus tenir compte du fait que l'horloge du récepteur ne peut pas être synchronisée avec les horloges des satellites. Il faut donc recevoir le signal d'un 4ème satellite pour corriger cet effet.

4. L'orbite des satellites de positionnement est quasi-circulaire. Calculer leur vitesse orbitale.

Solution: La vitesse orbitale pour une orbite ciculaire s'écrit

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

avec T la période de l'orbite et r la distance entre le satellite et le centre de la Terre. Grâce à la 3ème loi de Kepler on trouve

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 = GM_\oplus$$

On en déduit

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{h_sat + R_\oplus}}$$

avec h_{sat} l'altitude de l'orbite du satellite. On trouve donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{gps} & \simeq 3872\,\mathrm{m.s^{-1}} \\ v_{gal} & \simeq 3671\,\mathrm{m.s^{-1}} \end{array} \right.$$

5. Pour arriver à un positionnement précis, il est nécéssaire de prendre en compte certains effets intervenant dans l'expression de la pseudo-distance entre le satellite et le récepteur. En particulier, on corrige les effets relativistes. Au premier ordre, il en existe deux types : le premier est lié au mouvement des horloges, le

second au potentiel gravitationnel dans lequel l'horloge est plongée. On peut alors écrire le temps propre de l'horloge en fonction du temps coordonnée du système comme

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi_\oplus}{c^2}\right) dt$$

(a) Calculer le retard accumulé à cause de l'effet de dilatation du temps en une journée par l'horloge du satellite par rapport au temps coordonnée. Quelle erreur sur la distance cela représente t-il ?

> **Solution:** Pour le GPS :
>
> $$\frac{v_{gps}^2}{2c^2} \simeq 8.3.10^{-11}$$
>
> Retard accumulé en une journée : 7.2 μm
> Équivalent en distance : 2.1 km Pour GALILEO :
>
> $$\frac{v_{gal}^2}{2c^2} \simeq 7.5.10^{-11}$$
>
> Retard accumulé en une journée : 6.5 μm
> Équivalent en distance : 1.9 km

(b) Donner l'expression du potentiel gravitationnel terrestre $\phi_\oplus$ pour le satellite et pour le récepteur.

> **Solution:** Pour le récepteur : $\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}$
> Pour le satellite : $\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h_{sat}}$

(c) Donner le décalage entre les temps propres des horloges (embarquée et au sol) dû à la gravitation. Quel retard cela représente t-il sur une journée ? À quelle erreur sur la distance cela correspond-il ?

> **Solution:**
>
> $$\Delta\tau_{rec} - \Delta\tau_{sat} = \frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_\oplus + h_{sat}}\right)\Delta t \simeq 5.3.10^{-10}$$
>
> Retard accumulé en une journée : 45.6 μs
> Équivalent en distance : 13.7 km

(d) Conclure sur l'importance des corrections relativistes.

> **Solution:** Pour obtenir un système de positionnement précis, il faut tenir compte des corrections relativistes.

6. Quelles autres source de perturbations pouvez-vous imaginer sur le signal ?

> **Solution:** Entre le satellite et le récepteur, le signal va traverser l'atmosphère qui va induire des perturbations sur celui-ci. En particulier, la traversée de l'ionosphère le perturbe en raison des électrons libres présents dans cette couche. Dans un deuxième temps, la traversée va à son tour perturber le signal en raison des molécules d'eau qui y sont présentes et qui rentrent en résonance avec la fréquence micro-onde du signal.

C - Valeurs numériques utiles

- Vitesse de la lumière dans le vide : $c \simeq 2.998.10^8$ m.s^{-1}

- Rayon terrestre : $R_\oplus \simeq 6378$ km
- Masse de la Terre : $GM_\oplus \simeq 3.985.10^{14}$ m^3.s^{-2}
- Altitude GPS : $h_{GPS} = 20200$ km
- Altitude GALILEO : $h_{GAL} = 23200$ km