MASTER 1ère ANNEE - EXAMEN

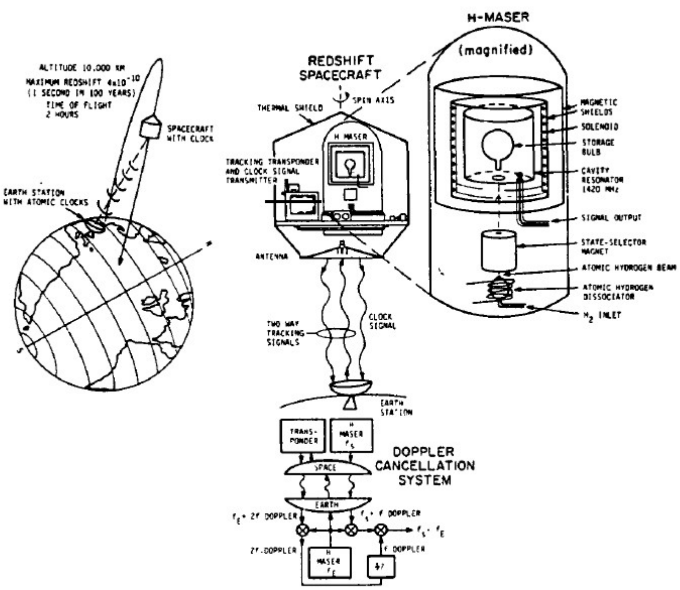
Physique des satellites et du positionnement

Gravity Probe A

Contrôle continu à rendre le lundi 27 février 2017

Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les même que dans le cours ou les TD. Les différentes parties du problème sont indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre voulu. Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.

Le 18 juin 1976, une fusée de type Scout D a été lancée des Iles Wallops en Virginie pour atteindre une altitude de 10 000 km. Cette fusée transportait une sonde de 100 kg stabilisée en rotation comportant notamment une horloge maser à hydrogène. L'objectif de l'expérience était de mesurer directement l'effet du potentiel gravitationnel sur la fréquence de l'horloge à bord par comparaison avec une horloge maser au sol. Le temps de vol fut suffisant pour permettre à l'expérience de durer un peu moins de 2 heures. Cette expérience menée par R. F. C. Vessot et M. W. Levine fut appelée : Gravity Probe A (GP-A).



Les données numériques du problème sont :

$$
\begin{aligned}
R_T &= 6378 \text{ km} \\
\Omega_T &= 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \\
Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\
c &= 299792458 \text{ m.s}^{-1} \\
\nu_H &= 1420405751,770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du maser à hydrogène)}
\end{aligned}
$$

Formulaire

Relations pour une orbite de Kepler :

$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$v^2 = Gm\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$
$$(1 - e\cos E)\mathrm{d}E = n\mathrm{d}t$$

A - Maser à hydrogène

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge maser à hydrogène, la transition d'horloge s'effectue entre deux niveaux hyperfins de l'hydrogène $1^2\ S_{1/2}\ F = 1$ et $1^2\ S_{1/2}\ F = 0$. Donner les valeurs des nombres quantiques associés à ces niveaux ainsi que leur degré de dégénérescence.

   Solution: On a $\vec{J} + \vec{I} = \vec{F}$ et donc $|j - i| \leq F \leq |j + i|$
   D'autre part : $-F \leq m_F \leq +F$ par pas de un.
   Etat $1^2S_{1/2}\ F = 1$: $n = 1$ (états internes) ; $s = 1/2$; $\ell = 0$ (moment cinétique orbital) ; $j = 1/2$ (moment cinétique électronique total) ; $F = 1$ (moment cinétique total) ; $i = 1/2$ (moment cinétique nucléaire)
   $m_F = -1, 0, 1$; l'ordre de dégénérescence est 3.
   Etat $1^2\ S_{1/2}\ F = 0$: $n = 1$; $s = 1/2$; $\ell = 0$; $j = 1/2$; $F = 0$; $i = 1/2$
   $m_F = 0$; le niveau n'est pas dégénéré.

2. On étudie la transition entre les 2 états des atomes $F = 1\ m_F = 0$ et $F = 0\ m_F = 0$ associés à la transition de l'horloge que l'on désigne par $|f\rangle$ et $|e\rangle$ respectivement. Cette transition est induite par un champ magnétique de direction constante et d'amplitude $B\cos\omega t$, avec B et ω constantes.

   L'hamiltonien total peut s'écrire sous la forme

   $$H_{tot} = H_0 + H(t)$$

   avec $H_0|f\rangle = \hbar\omega_f|f\rangle$
   $H_0|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle$
   $H(t)|f\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|e\rangle$
   $H(t)|e\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|f\rangle$
   où ω_f, ω_e et Ω sont des constantes.

   On note l'état de l'atome au temps t par

   $$|\psi(t)\rangle = a(t)|f\rangle + b(t)|e\rangle$$

   Ecrire l'équation d'évolution de $|\psi(t)\rangle$. Déterminer les équations différentielles qui gouvernent l'évolution en temps des coefficients $a(t)$ et $b(t)$.

Solution: $H_{tot}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$
$$\begin{cases} i\dfrac{da}{dt} = \omega_f a + \Omega\cos\omega t\ b \\ i\dfrac{db}{dt} = \omega_e b + \Omega\cos\omega t\ a \end{cases}$$

3. Si que l'on impose la condition initiale : $a(0) = 1$ et $b(0) = 0$, la solution de l'équation précédente donne :

$$b(t) = -i\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\frac{\Omega' t}{2}e^{-i\omega_d t/2}e^{-iw_e t}$$

avec $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \omega_d^2}$
Quelle est la probabilité de transition de l'atome vers l'état $|e\rangle$ au temps t ?

Solution: $P(t) = |b(t)|^2 = \dfrac{\Omega^2}{\Omega'^2}\sin^2\dfrac{\Omega' t}{2}$

4. Qu'est-ce que la fréquence de Rabi du système ? De quel(s) paramètre(s) dépend-elle ? Quel est le phénomène associé à cette fréquence ?

Solution: La fréquence de Rabi du système est la fréquence d'oscillation des atomes entre les deux états lorsque le système est en interaction avec un signal à la résonance. Elle est proportionnelle à l'amplitude du champ magnétique B.

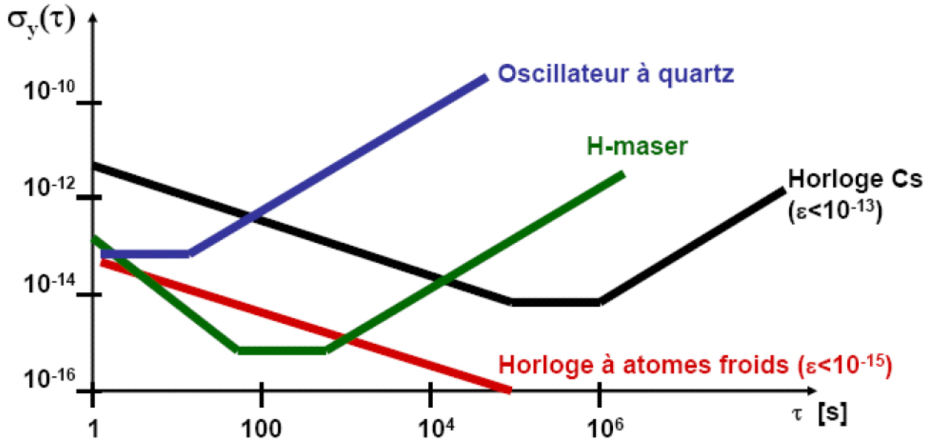
5. Quel paramètre physique détermine la largeur de la raie d'interaction ? Pourquoi est-ce difficile d'obtenir des mesures de grande précision avec une interaction unique ?

Solution: Lorsqu'une onde interagit avec un atome avec une fréquence proche de la résonance, la probabilité de transition entre les deux niveaux concernés va osciller en fonction du temps d'interaction à la pulsation de Rabi $\Omega_{Rabi} = \frac{\mu_B B_0}{2\hbar}g = -\Omega$ (avec B_0 amplitude du champ magnétique, μ_B magnéton de Bohr et g facteur de Landé). Ce sont les oscillations de Rabi. La largeur de raie est alors proportionnelle à l'inverse du temps d'interaction. Pour obtenir des mesures de grande précision, il faut donc être capable de produire des interactions de longues durées ce qui est difficile à obtenir car cela nécessite une grande stabilité de la part de la source de l'onde (laser, oscillateur à quartz, ...).

6. Décrire brièvement le rôle de l'oscillateur dans le fonctionnement d'une horloge atomique passive telle qu'une horloge à Césium.

Solution: L'oscillateur fait le lien entre le compteur (qui permet de lire la valeur de la fréquence) et les atomes de l'horloge. L'oscillateur émet un signal dont la valeur est proche de celle de l'horloge. Ce signal électromagnétique est envoyé sur les atomes. Si le signal est à la fréquence atomique, il y aura résonance avec les niveaux atomiques et la réponse des atomes sera forte. Une boucle de rétroaction permet alors de détecter le maximum de résonance pour fixer la fréquence de l'oscillateur à celle de l'horloge. La fréquence de l'oscillateur est alors mesurée par un compteur.

7. Le diagramme ci-dessous donne les stabilités de différents types d'horloges. A l'époque de l'expérience, les horloges à atomes froids n'existaient pas.



Justifier le choix de l'horloge pour l'expérience.

Solution: Le maser à hydrogène est l'horloge la plus performante en terme de stabilité pour le temps de mesure associé à l'expérience.

B - Orbite de GP-A

On suppose que l'orbite de GP-A est une orbite keplerienne. Vu les masses respectives de la Terre et de la fusée Scout, on suppose que le barycentre des masses des deux objets est confondu avec le centre de masse de la Terre. Dans le plan orbitale de GP-A, on introduit les coordonnées polaires usuelles (r, ϕ), avec leurs vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$, où r est la distance du centre de masse de la fusée Scout au centre de masse de la Terre, et ϕ l'angle entre le vecteur position initial de la fusée (au temps $t = 0$, correspondant au moment son lancement) et sa position au temps t.

1. Quelle sont les deux quantités conservées du problème de Kepler ? Exprimer la norme du moment cinétique par unité de masse réduite, h, en fonction de r et de v_ϕ, où $v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{u}_\phi$ et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la fusée Scout.

Solution: L'énergie totale et le moment cinétique du système réduit sont conservés (la masse réduite du système est $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, où m_1 et m_2 sont les masses de le Terre et de la fusée Scout).

$$h = r^2 \dot{\phi} = r v_\phi$$

2. La fusée est lancée de façon verticale, donc la composante v_ϕ au moment du lancement est uniquement due à la vitesse de rotation de la Terre. Calculer h, sachant que la position initiale de la fusée est en $r = R_T$ à une latitude de $\lambda = 29°44'$.

Solution:

$$v_{\phi 0} = R_T \Omega_T \cos\lambda = 4.039 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$h = R_T v_{\phi 0} = 2.576 \times 10^9 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

3. Soit $r = R_a$ la distance de la fusée Scout au centre de la Terre lorsqu'elle est à son apogée, à 10000 km d'altitude. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à l'apogée de la fusée, en fonction de h, R_a et Gm. Calculer la valeur de $\tilde{E}$. D'après cette valeur, quelle est le type d'orbite de la fusée ?

Solution:

$$\tilde{E} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{Gm}{R_a} = \frac{h^2}{2R_a^2} - \frac{Gm}{R_a} = -2.432 \times 10^7 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$$

car $v_r = 0$ à l'apogée. $\tilde{E} < 0$ donc l'orbite est elliptique.

4. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à la position initiale de la fusée, en fonction de h, R_T, Gm et v_{r0}, la composante suivant $\vec{u}_r$ de la vitesse à sa position initiale. Avec la question précédente, en déduire l'expression de la vitesse v_{r0} en fonction de R_a, R_T, h et Gm. Calculer sa valeur.

Solution:

$$\tilde{E} = \frac{h^2}{2R_T^2} + \frac{v_{r0}^2}{2} - \frac{Gm}{R_T}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{r0}^2 &= 2Gm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_A}\right) - h^2\left(\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{R_A^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_A}\right)\left(2Gm - h^2\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_A}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{r0} = 8.727 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

5. Exprimer l'eccentricité de l'orbite e en fonction de h, R_a et Gm. La calculer. D'après sa valeur, de quelle figure géométrique est proche la forme de l'orbite ? À quelle distance du centre de masse de la Terre devrait se trouver le périgée de l'orbite ? Est-ce possible ? Faire un dessin qualitatif de la forme de l'orbite et de la Terre, en indiquant le vecteur vitesse de la fusée et la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ à l'endroit du lancement.

Solution:

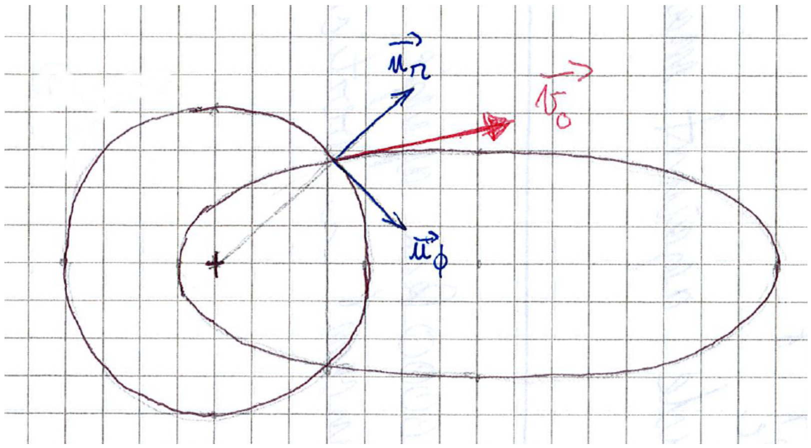
$$e = 1 - \frac{h^2}{GmR_a} = 0.9990$$

e est très proche de 1 donc d'une trajectoire parabolique.

$$r_p = \frac{h^2}{Gm(1+e)} = 8.329 \times 10^3 \text{ m}$$

Ce n'est évidemment pas posible de passer à environ 8 km du centre de la Terre.

Représentation qualitative de l'orbite de la fusée :



Le cercle de rayon R_T représente l'intersection entre la surface terrestre et le plan orbital de la fusée. Ce plan est incliné d'un angle égal à la latitude du lieu de lancement par rapport à l'équateur terrestre.

C - Comparaison d'horloges

On se place dans un référentiel GCRS dans lequel :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{1}$$

où on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés, et $i, j = \{1, 2, 3\}$.

1. Quelles sont les caractéristiques du système GCRS ?

Solution: Ce système de référence est centré sur le centre de masse de la Terre. Il est fixe/non-tournant par rapport aux objets distants extra-galactiques. Le temps coordonnée est le TCG (Temps Coordonnée Géocentrique).

2. En partant de la métrique (1), calculez $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ en faisant un développement limité à l'ordre $1/c^2$. On introduira la norme de la vitesse $v = \left(\delta_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}\tau^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \\
&\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{v^2}{c^2} \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{Gm}{rc^2} - \frac{v^2}{2c^2} + O(c^{-4}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

3. Sachant que $a = 8.193 \times 10^3$ km et $e = 0.9990$, calculer la valeur de l'anomalie excentrique E au moment du lancement de la fusée. En utilisant l'équation de Kepler, en déduire le temps t_a à l'apogée (sachant que $t = 0$ au moment du lancement).

Solution: D'après la relation $r = a(1 - e\cos E)$, on a

$$E(0) = \arccos\left[e^{-1}\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)\right] = 1.347$$

D'après l'équation de Kepler $E(t) - e\sin E(t) = n(t - t_p)$:
– à l'apogée : $\pi = n(t_a - t_p)$ car $E(t_a) = \pi$
– au lancement : $E(0) - e\sin E(0) = -nt_p$
On a alors :

$$t_a = \frac{1}{n}\left[\pi - (E(0) - e\sin E(0))\right] = 54.21 \text{ mn}$$

4. En utilisant les relations sur l'orbite de Kepler données en annexe, on peut montrer que (ne pas le faire) en intégrant la relation de la question précédente :

$$\tau_f(t) = \left(1 - \frac{3Gm}{2ac^2}\right)t - \frac{2\sqrt{Gma}}{c^2}e\sin E(t) + C_f \ , \tag{3}$$

où τ_f est le temps propre de l'horloge dans la fusée, a est le demi grand axe de l'orbite de la fusée, e l'excentricité, E l'anomalie excentrique et C_f est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_f(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante C_f ?

Solution: D'après (2) et en remplaçant l'expression de v^2, on obtient :

$$\mathrm{d}\tau = \left[1 - \frac{3Gm}{2ac^2} - \frac{2Gm}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\right]\mathrm{d}t$$

En utilisant $r = a(1 - e\cos(E))$:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{e\cos(E)}{r}$$

et en utilisant $(1 - e\cos(E))\mathrm{d}E = n\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}t}{r} = \frac{\mathrm{d}E}{an}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{2Gm}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\mathrm{d}t &= \int \frac{2Gm}{c^2}\frac{e\cos(E)}{an}\mathrm{d}E \\ &= \frac{2\sqrt{Gma}}{c^2}e\sin(E) + \text{Cste}\end{aligned}$$

L'intégration du terme constant est immédiate, et alors on obtient bien la relation (3).

$$C_f = \frac{2\sqrt{Gma}}{c^2}e\sin E(0) = 1.239 \times 10^{-6} \text{ s}$$

5. En intégrant la relation de la question 2 pour une horloge qui reste fixée à l'endroit du lancement, montrer que :

$$\tau_s(t) = \left(1 - \frac{Gm}{R_T c^2} - \frac{(R_T\Omega_T\cos\lambda)^2}{2c^2}\right)t + C_s \ , \tag{4}$$

où τ_s est le temps propre de l'horloge restée au sol, λ est la latitude du lieu du lancement et C_s est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_s(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante C_s ?

Solution: Le terme en fréquence étant constant, l'intégration est immédiate. On a $C_s = 0$.

6. Déduire des questions précédentes l'expression formelle de la différence entre les temps propres de l'horloge dans la fusée et le temps propre de l'horloge au sol au moment de l'apogée de la fusée, et la calculer.

Solution:

$$\tau_f(t_a) - \tau_s(t_a) = \left(\frac{Gm}{R_T c^2} + \frac{(R_T \Omega_T \cos\lambda)^2}{2c^2} - \frac{3Gm}{2ac^2} \right) t_a + C_f = 862.4 \text{ ns}$$