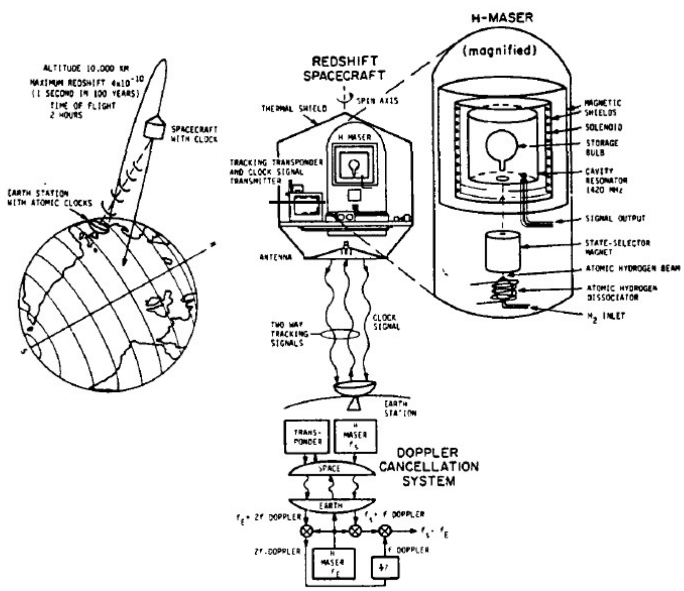
**MASTER 1ère ANNEE - EXAMEN**
***Physique des satellites et du positionnement***
**Gravity Probe A**

Contrôle continu à rendre le lundi 27 février 2017

*Quand elles ne sont pas définies dans le texte, les notations utilisées dans ce problème sont les même que dans le cours ou les TD. Les différentes parties du problème sont indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre voulu. Les réponses devront être soigneusement rédigées, notamment en définissant précisément les notations utilisées.*

Le 18 juin 1976, une fusée de type Scout D a été lancée des Iles Wallops en Virginie pour atteindre une altitude de 10 000 km. Cette fusée transportait une sonde de 100 kg stabilisée en rotation comportant notamment une horloge maser à hydrogène. L'objectif de l'expérience était de mesurer directement l'effet du potentiel gravitationnel sur la fréquence de l'horloge à bord par comparaison avec une horloge maser au sol. Le temps de vol fut suffisant pour permettre à l'expérience de durer un peu moins de 2 heures. Cette expérience menée par R. F. C. Vessot et M. W. Levine fut appelée : Gravity Probe A (GP-A).




Les données numériques du problème sont :

$$
\begin{aligned}
R_T &= 6378 \text{ km} \\
\Omega_T &= 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \\
Gm &= 3,985 \cdot 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2} \\
c &= 299792458 \text{ m.s}^{-1} \\
\nu_H &= 1420405751,770 \text{ Hz (fréquence d'horloge du maser à hydrogène)}
\end{aligned}
$$

# Formulaire

Relations pour une orbite de Kepler :

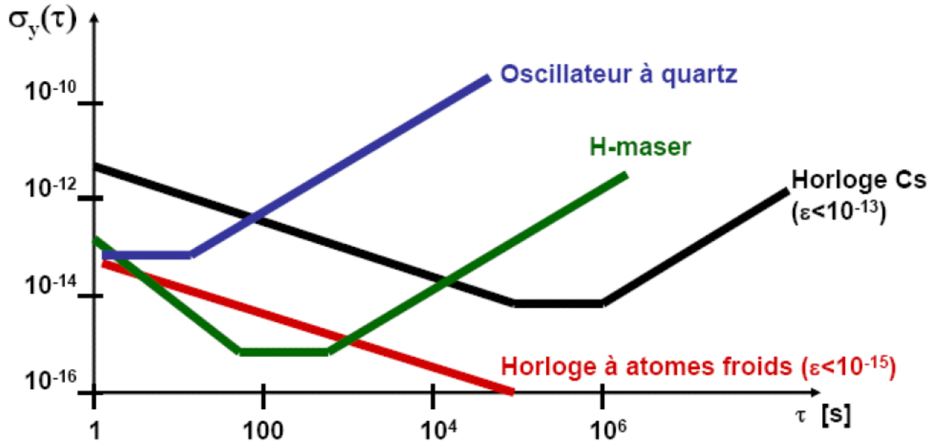
$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$v^2 = Gm\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$
$$(1 - e\cos E)\mathrm{d}E = n\mathrm{d}t$$

# A - Maser à hydrogène

Pour les questions relevant de cette partie A, les résultats de cours en physique quantique peuvent être utilisés sans démonstration pour justifier les réponses, à condition de définir soigneusement les quantités utilisées.

1. Dans une horloge maser à hydrogène, la transition d'horloge s'effectue entre deux niveaux hyperfins de l'hydrogène $1^2\ S_{1/2}\ F = 1$ et $1^2\ S_{1/2}\ F = 0$. Donner les valeurs des nombres quantiques associés à ces niveaux ainsi que leur degré de dégénérescence.
2. On étudie la transition entre les 2 états des atomes $F = 1\ m_F = 0$ et $F = 0\ m_F = 0$ associés à la transition de l'horloge que l'on désigne par $|f\rangle$ et $|e\rangle$ respectivement. Cette transition est induite par un champ magnétique de direction constante et d'amplitude $B\cos\omega t$, avec $B$ et $\omega$ constantes.
   L'hamiltonien total peut s'écrire sous la forme
   $$H_{tot} = H_0 + H(t)$$
   avec $H_0|f\rangle = \hbar\omega_f|f\rangle$
   $H_0|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle$
   $H(t)|f\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|e\rangle$
   $H(t)|e\rangle = \hbar\Omega\cos\omega t|f\rangle$
   où $\omega_f$, $\omega_e$ et $\Omega$ sont des constantes.
   On note l'état de l'atome au temps $t$ par
   $$|\psi(t)\rangle = a(t)|f\rangle + b(t)|e\rangle$$
   Ecrire l'équation d'évolution de $|\psi(t)\rangle$. Déterminer les équations différentielles qui gouvernent l'évolution en temps des coefficients $a(t)$ et $b(t)$.
3. Si que l'on impose la condition initiale : $a(0) = 1$ et $b(0) = 0$, la solution de l'équation précédente donne :
   $$b(t) = -i\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\frac{\Omega' t}{2}e^{-i\omega_d t/2}e^{-iw_e t}$$
   avec $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \omega_d^2}$
   Quelle est la probabilité de transition de l'atome vers l'état $|e\rangle$ au temps $t$ ?
4. Qu'est-ce que la fréquence de Rabi du système ? De quel(s) paramètre(s) dépend-elle ? Quel est le phénomène associé à cette fréquence ?
5. Quel paramètre physique détermine la largeur de la raie d'interaction ? Pourquoi est-ce difficile d'obtenir des mesures de grande précision avec une interaction unique ?
6. Décrire brièvement le rôle de l'oscillateur dans le fonctionnement d'une horloge atomique passive telle qu'une horloge à Césium.

7. Le diagramme ci-dessous donne les stabilités de différents types d'horloges. A l'époque de l'expérience, les horloges à atomes froids n'existaient pas.




Justifier le choix de l'horloge pour l'expérience.

## B - Orbite de GP-A

On suppose que l'orbite de GP-A est une orbite keplerienne. Vu les masses respectives de la Terre et de la fusée Scout, on suppose que le barycentre des masses des deux objets est confondu avec le centre de masse de la Terre. Dans le plan orbitale de GP-A, on introduit les coordonnées polaires usuelles $(r, \phi)$, avec leurs vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$, où $r$ est la distance du centre de masse de la fusée Scout au centre de masse de la Terre, et $\phi$ l'angle entre le vecteur position initial de la fusée (au temps $t = 0$, correspondant au moment son lancement) et sa position au temps $t$.

1. Quelle sont les deux quantités conservées du problème de Kepler ? Exprimer la norme du moment cinétique par unité de masse réduite, $h$, en fonction de $r$ et de $v_\phi$, où $v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{u}_\phi$ et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la fusée Scout.
2. La fusée est lancée de façon verticale, donc la composante $v_\phi$ au moment du lancement est uniquement due à la vitesse de rotation de la Terre. Calculer $h$, sachant que la position initiale de la fusée est en $r = R_T$ à une latitude de $\lambda = 29°44'$.
3. Soit $r = R_a$ la distance de la fusée Scout au centre de la Terre lorsqu'elle est à son apogée, à 10000 km d'altitude. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à l'apogée de la fusée, en fonction de h, $R_a$ et $Gm$. Calculer la valeur de $\tilde{E}$. D'après cette valeur, quelle est le type d'orbite de la fusée ?
4. Exprimer la valeur de l'énergie par unité de masse réduite $\tilde{E}$ à la position initiale de la fusée, en fonction de h, $R_T$, $Gm$ et $v_{r0}$, la composante suivant $\vec{u}_r$ de la vitesse à sa position initiale. Avec la question précédente, en déduire l'expression de la vitesse $v_{r0}$ en fonction de $R_a$, $R_T$, $h$ et $Gm$. Calculer sa valeur.
5. Exprimer l'eccentricité de l'orbite $e$ en fonction de $h$, $R_a$ et $Gm$. La calculer. D'après sa valeur, de quelle figure géométrique est proche la forme de l'orbite ? À quelle distance du centre de masse de la Terre devrait se trouver le périgée de l'orbite ? Est-ce possible ? Faire un dessin qualitatif de la forme de l'orbite et de la Terre, en indiquant le vecteur vitesse de la fusée et la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ à l'endroit du lancement.

## C - Comparaison d'horloges

On se place dans un référentiel GCRS dans lequel :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{1}$$

où on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés, et $i, j = \{1, 2, 3\}$.

1. Quelles sont les caractéristiques du système GCRS ?

2. En partant de la métrique (1), calculez $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ en faisant un développement limité à l'ordre $1/c^2$. On introduira la norme de la vitesse $v = \left(\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}$.
3. Sachant que $a = 8.193 \times 10^3$ km et $e = 0.9990$, calculer la valeur de l'anomalie excentrique $E$ au moment du lancement de la fusée. En utilisant l'équation de Kepler, en déduire le temps $t_a$ à l'apogée (sachant que $t = 0$ au moment du lancement).
4. En utilisant les relations sur l'orbite de Kepler données en annexe, on peut montrer que (ne pas le faire) en intégrant la relation de la question précédente :

$$\tau_f(t) = \left(1 - \frac{3Gm}{2ac^2}\right) t - \frac{2\sqrt{Gma}}{c^2} e \sin E(t) + C_f \ , \tag{3}$$

où $\tau_f$ est le temps propre de l'horloge dans la fusée, $a$ est le demi grand axe de l'orbite de la fusée, $e$ l'excentricité, $E$ l'anomalie excentrique et $C_f$ est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_f(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante $C_f$ ?
5. En intégrant la relation de la question 2 pour une horloge qui reste fixée à l'endroit du lancement, montrer que :

$$\tau_s(t) = \left(1 - \frac{Gm}{R_T c^2} - \frac{(R_T \Omega_T \cos\lambda)^2}{2c^2}\right) t + C_s \ , \tag{4}$$

où $\tau_s$ est le temps propre de l'horloge restée au sol, $\lambda$ est la latitude du lieu du lancement et $C_s$ est une constante d'intégration. En supposant que $\tau_s(0) = 0$, quelle est la valeur de la constante $C_s$ ?
6. Déduire des questions précédentes l'expression formelle de la différence entre les temps propres de l'horloge dans la fusée et le temps propre de l'horloge au sol au moment de l'apogée de la fusée, et la calculer.